HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

MATEMAATTIS-LUONNONTIETEELLINEN TIEDEKUNTA
MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIGA FAKULTETEN
FACULTY OF SCIENCE

Paikka- ja kymmenjärjestelmän opettaminen toiminnallisen materiaalin avulla

Blerine Tasholli

Helsingin yliopisto

Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta

Matematiikan ja tilastotieteen osasto

Huhtikuu 2020

Ohjaaja: Mika Koskenoja & Juha Oikkonen

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

MATEMAATTIS-LUONNONTIETEELLINEN TIEDEKUNTA
MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIGA FAKULTETEN
FACULTY OF SCIENCE

Tiedekunta – Fakultet – Faculty		Koulutusohjelma – Utbildningsprogram – Degree programme
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta		Matematiikan koulutusohjelma, aineenopettajan koulutus
Tekijä – Författare – Author Blerine Tasholli		
Työn nimi – Arbetets titel – Title Paikka- ja kymmenjärjestelmän opettaminen toiminnallisen materiaalin avulla		
Työn laji – Arbetets art – Level Pro gradu-tutkielma	Aika – Datum – Month and year Huhtikuu 2020	Sivumäärä – Sidoantal – Number of pages 50 sivua + 12 liitesivua

Tiivistelmä – Referat – Abstract

Tutkimuksen tavoitteena on kehittää toiminnallinen materiaali paikka- tai kymmenjärjestelmän opettamiseen sekä testata sitä konkreettisesti eri ikäisten oppilaiden kanssa. Matematiikan hierarkkisen luonteen vuoksi kymmenjärjestelmän ymmärtäminen on keskeinen osa matematiikan opetusta, sillä on todella vaikeaa oppia kehittyneempää matematiikka, jos vaikeuksia on jo kymmenjärjestelmän ymmärtämisessä.

Kymmenjärjestelmän oppiminen on kuitenkin hankalaa suurelle osalle oppilaista, minkä vuoksi sen opettamiseen on kehitetty useita erilaisia kymmenjärjestelmävälineitä. Näitä toiminnallisia välineitä, toiminnallista opettamista ja kymmenjärjestelmän oppimisen vaikeuksia on käsitelty tarkemmin tutkielman toisessa luvussa. Tässä tutkimuksessa kehitetty paikka-/kymmenjärjestelmäruudukko poikkeaa jo olemassa olevista välineistä siinä, että kehitetty materiaali on abstraktimpaa. Siinä missä yleisimmissä kymmenjärjestelmävälineissä eri yksiköt (eli esimerkiksi ykköset ja kymmenet) erotetaan toisistaan koon tai muodon perusteella, niin kymmenjärjestelmäruudukossa ainoastaan numeron paikalla on merkitystä. Kehitetty toimintamateriaali on myös helppo ottaa jokaisen käyttöönsä, koska se ei vaadi mitään kalliita välineitä.

Tutkielman kolmannessa luvussa on esitetty selkeästi tutkimuskysymykset ja tutkimusmenetelmä. Tutkimus on toteutettu kehittämistutkimuksena, jonka vuoksi luvussa kolme on lisäksi raportoitu hyvin yksityiskohtaisesti tutkimuksen toteutuksen eri vaiheet. Myös kymmenjärjestelmäruudukko sekä sen käyttöohjeet esimerkkeineen löytyvät tämän luvun alta.

Tutkimuksesta saatuja tuloksia esitetään tutkimustulokset-luvussa. Tutkimustulokset on jaettu niin, että jokaista kyselylomaketta on tutkittu tarkasti yksi tehtävä kerrallaan, jonka jälkeen niistä on pyritty löytämään vastauksia tutkimuskysymyksiin. Lisäksi tutkimustuloksissa on tutkittu jokaisen oppilaan kehitystä alku- ja loppukyselyn välillä. Tutkimustulosten perusteella kymmenjärjestelmäruudukosta näyttää olevan apua desimaalilukujen paikka-arvon ymmärtämisessä.

Tutkielman viidennessä luvussa on pohdittu tutkimuksen luotettavuutta sekä sen jatkokehittämismahdollisuuksia. Tutkimukseen osallistuvien oppilaiden määrä oli pieni, mikä on hyvä pitää mielessä tutkimustuloksia tarkasteltaessa. Se saattaa vaikuttaa tutkimustuloksiin.

Avainsanat – Nyckelord – Keywords
Matematiikka, paikkajärjestelmä, kymmenjärjestelmä, toiminnallinen opettaminen, kymmenjärjestelmävälineet, kokonaisluvut, desimaaliluvut

Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited
Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information

Sisällysluettelo

1. Johdanto

Koko lukujärjestelmä perustuu numeroiden paikka-arvoon ja kokonaislukujen kymmenjärjestelmän opettaminen on keskeinen asia matematiikassa, erityisesti alakoulun tasolla (Hunter, Turner, Russel, Trew, & Curry, 1994; OPS, 2014; Tempier, 2015). Monet tutkimukset ovat kuitenkin osoittaneet, että kymmenjärjestelmän oppimisessa ja opettamisessa on vaikeuksia (Tempier, 2015). Vaikeuksia on sekä kokonaislukujen että desimaalilukujen osalta. Tutkimusten mukaan myös monet yläkoulun ja lukion virheet johtuvat kymmenjärjestelmän ja paikka-arvon ymmärtämättömyydestä (Hunter ym., 1994). Tämä voi olla selitettävissä matematiikan hierarkkisen luonteen avulla. Jos vaikeuksia on jo kymmenjärjestelmän ymmärtämisessä, on hyvin vaikeaa oppia kehittyneempää matematiikkaa. Koska kymmen- ja paikkajärjestelmän oppiminen on selvästikin hankalaa, on suositeltavaa käyttää visuaalisia kuvia ja konkreettisia toimia, joilla kehitetään asianmukainen käsitys paikka-arvosta (Behrens, 2015). Paikka-arvon ymmärtäminen ei ole yksittäinen, kerran kokonaisuudessa opeteltava asia, vaan se kehittyy vähitellen ja sitä on opetettava jatkuvasti uudelleen erilaisissa yhteyksissä ja erilaisilla luvuilla. (Hunter ym., 1994)

Kymmenjärjestelmän oppimisen haastavuudesta johtuen, sen opettamiseen on kehitetty useita erilaisia toiminnallisia välineitä, sillä monessa eri tutkimuksessa on todettu toiminnallisen opettamisen auttavan uuden asian oppimisessa ja käsitteiden muodostuksessa (Ikäheimo, 2002; Ikäheimo & Risku, 2004; Kennedy, 1986; Lindgren, 1990; Rossi & Vainio-Rantanen, 1994). Todennäköisesti yleisimmät käytössä olevat välineet ovat muoviset kymmenjärjestelmävälineet (kuva 2), joissa muoto ja koko erottavat eri yksiköt (eng. unit) toisistaan (Hunter ym., 1994; Ikäheimo, 2002). Moneen muunkin kymmenjärjestelmävälineen ominaisuuksiin kuuluu se, että koko erottaa yksiköt toisistaan, mikä saattaa johtaa siihen, että paikka-arvon käsitettä ei ymmärretä kunnolla. Tämän koko-ongelman välttämiseksi, tutkimuksessa on kehitetty toiminnallinen väline, jossa koolla ei ole merkitystä. Tutkimuksessa kehitettiin paikkajärjestelmäruudukko (tai kymmenjärjestelmäruudukko kymmenjärjestelmän tapauksessa), jossa eri yksiköt ovat eri sarakkeissa ja missä sama esine vastaa eri lukua, riippuen sen paikasta ruudukossa. Paikkajärjestelmäruudukon avulla voidaan opiskella sekä kokonais- että desimaalilukuja. Kehitetty toiminnallinen materiaali tukee myös kymmenjärjestelmässä laskemista, mikä auttaa yhdistämään konkretia symboliseen matematiikkaan. Paikkajärjestelmäruudukon käyttäminen vaatii abstraktimpaa ajattelua, koska siinä korostuu lukujen paikka-arvon merkitys, kun koko ei erota eri yksiköitä toisistaan.

Tutkimuksen tavoitteena oli siis kehittää yllä mainittu toiminnallinen materiaali kymmenjärjestelmän oppimiseen ja sen lisäksi testata kehitettyä tuotosta. Kehitettyä toiminnallista materiaalia kokeiltiin kolmella eri joukolla. Ensimmäisenä kokeiltiin Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen osaston opiskelijoiden kanssa viisijärjestelmän avulla. Tämän kokeilun tarkoituksena oli saada palautetta ruudukon toimivuudesta ja siitä, miten sitä voisi edelleen parannella. Ensimmäisen kokeilukerran jälkeen, kymmenjärjestelmäruudukon käyttöä testattiin vantaalaisessa peruskoulussa viidesluokkalaisten kanssa kokonaislukujen tapauksessa. Viimeisenä kymmenjärjestelmäruudukkoa testattiin desimaaliluvuilla seitsemäsluokkalaisten kanssa helsinkiläisessä peruskoulussa. Jokaisen kokeilukerran jälkeen kehitettyä toiminnallista materiaalia paranneltiin saadun palautteen perusteella. Kahdella viimeisellä kokeilukerralla oppilaat tekivät ennen opetuskokeilua alkukyselyt, sitten käytiin tutkijan johdolla kymmenjärjestelmäruudukon käyttöä läpi ja harjoiteltiin sillä laskemista ja lopuksi tehtiin loppukyselyt. Alku- ja loppukyselyn sekä tunneilla saadun palautteen avulla oli tavoitteena saada vastauksia kahteen tutkimuskysymykseen, jotka ovat:

1. Tukeeko kymmenjärjestelmäruudukon käyttö yhteen-, vähennys- ja kertolaskun oppimista?
2. Tukeeko kymmenjärjestelmäruudukon käyttö desimaalilukujen paikka-arvon ymmärtämistä ja desimaaliluvuilla laskemista?

2. Teoria

2.1. Paikka- ja kymmenjärjestelmä

Paikkajärjestelmä on symbolinen järjestelmä, joka perustuu kunkin numeron suhteelliseen merkitykseen. Paikkajärjestelmän kokonaisuuden ymmärtäminen edellyttää yksikön (eng. unit) käsitteen ymmärtämistä. Myös yksiköiden välisten suhteiden ymmärtäminen on välttämätöntä ihan jo numeromerkinnän ymmärtämiseksi. Monet oppilaat saattavat ymmärtää moninumeroiset luvut kokoelmana ykkösiä eivätkä monen eri yksikön (eng. unit) rakenteina, jotka perustuvat lukuun 10. Esimerkiksi luku 37 nähdään 37 ykkösen kokoelmana, eikä niin että siinä on kymmeniä kolme ja ykkösiä seitsemän. (Hunter, Turner, Russel, Trew, & Curry, 1994; Solovieva, Rosas Rivera, Quintanar & García M., 2013; Tempier, 2015)

Paikkajärjestelmällä on neljä ominaisuutta. Ensimmäisenä sillä on paikallinen ominaisuus - paikalla on merkitystä. Itse asiassa paikkajärjestelmän opettaminen perustuu numeroiden sijoittamiseen oikeille paikoille. Paikkajärjestelmän toinen ominaisuus on sen perustuminen johonkin kantalukuun. Käytössämme olevan kymmenjärjestelmän kantalukuna on luku 10. Siirryttäessä oikealta vasemmalle arvot kasvavat kymmenellä. Kolmas ominaisuus on paikkajärjestelmän divisiivinen eli jakava ominaisuus. Yksittäisen numeron arvo löytyy kertomalla numeron nimellisarvo sen sijainnille määritetyllä arvolla. Esimerkiksi jos satojen kohdalla kymmenjärjestelmässä on numero viisi, niin sen arvo saadaan kertomalla $5 \cdot 100 = 500$. Edelliseen ominaisuuteen liittyen, paikkajärjestelmän neljäs ominaisuus on yhteenlaskettavuus. Koko luvun edustama arvo on yksittäisten numeroiden edustamien arvojen summa. Esimerkiksi $123 = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1$. (Behrens, 2015; Sowder, 1997)

Tiedetään, että puheella on suuri merkitys lapsen jokaisessa kehitysvaiheessa. Miksi siihen ei kiinnitetä suurempaa huomiota kymmenjärjestelmän opettamisessa? Esimerkiksi käsiteltäessä lukua 7200 puhutaan yleensä vain luvusta “seitsemäntuhatta kaksisataa”. Miksi ei puhuta, että siinä on 7200 ykköstä, 720 kymmentä, 72 satasta ja $7{,}2$ tuhatta? Kaikki nämä ilmaisumuodot edustavat kuitenkin samaa lukua ja tällä tavalla puhuminen tarjoaisi paljon joustavuutta ja oivalluksia lukujen kanssa työskennellessä. (Ikäheimo, & Risku, 2004; Sowder, 1997) Puheen lisäksi myös toiminnallisten materiaalien avulla voidaan tukea kymmenjärjestelmän oppimista. Koska kymmenjärjestelmän oppiminen on usein oppilaille hankalaa, on sen oppimisen tukemiseksi kehitetty useita erilaisia toiminnallisia välineitä. (Ikäheimo, 2002; Tempier, 2015)

Kymmenjärjestelmän hallitsemisen merkitys korostuu myös meidän opetussuunnitelmassa. Erityisesti alakoulun puolella on jokaisella vuosiluokalla matematiikan opetuksen tavoitteena kymmenjärjestelmän ymmärtäminen (OPS, 2014). Monet tutkimukset ovat kuitenkin osoittaneet, että kymmenjärjestelmän oppimisessa ja opettamisessa on vaikeuksia (Tempier, 2015). Tutkimusten mukaan myös monet yläkoulun ja lukion virheet johtuvat kymmenjärjestelmän ja paikka-arvon ymmärtämättömyydestä, joka voi johtua kokonaislukujen paikka-arvon taustalla olevasta heikkoudesta. Vaikeuksia ovat esimerkiksi lukujen järjestäminen sekä yhteen- ja vähennyslasku, johon tarvitaan lainaamista tai kymmenylitystä. (Hunter ym., 1994) Oppilas saattaa ratkaista rutiiniomaisen algoritmisen tehtävän ihan oikein, vaikka hänellä olisi pinnallinen ja riittämätön ymmärrys kokonaislukujen paikkajärjestelmästä. Esimerkiksi allekkain vähennyslasku muodostuu usealle oppilaalle mekaaniseksi rutiiniksi, eivätkä he välttämättä edes muista, mistä tehtävässä on kyse. Toinen alue, jossa tapahtuu paljon virheitä, on desimaaliluvut. (Hunter ym., 1994; Ikäheimo, 2002; Solovieva ym., 2013)

2.2. Desimaaliluvut

Desimaaliluvut ovat laajennus kokonaisluvuista ja ne sisältävät sellaisenaan kokonaislukujen joukon. Desimaaliluvut, niin kuin kokonaisluvutkin, symbolisoidaan paikkajärjestelmän avulla. Tämän vuoksi olisi tärkeää panostaa enemmän paikkajärjestelmän opettamiseen kokonaislukujen kohdalla, ennen kuin aloitetaan opiskelemaan desimaalilukuja. Myöhemmin tarvitaan vähemmän aikaa desimaaliluvuilla laskemisen opettelemiseen, jos oppilas hallitsee paikkajärjestelmän perusperiaatteet. On siis kaikkien edun mukaista käyttää enemmän aikaa siihen, että oppilaat ymmärtävät desimaalilukujen merkintätapaa, nimenomaan paikkajärjestelmään perustuen. (Behrens, 2015; Sowder, 1997)

Paikkajärjestelmän laajentaminen luonnollisista luvuista desimaalilukuihin ei ole itsestään selvää, vaan se aiheuttaa usein vaikeuksia oppimisprosessissa. Monilla oppilailla on heikko ymmärrys desimaaliluvuista. Eri tutkimuksissa korostetaan oppilaiden rakentavan useita väärinkäsityksiä desimaalimerkinnästä. Suurin osa näistä väärinkäsityksistä viittaa siihen, että paikkajärjestelmää ei ole ymmärretty kokonaislukujen yhteydessä, mikä on välttämätöntä, jotta ymmärrämme desimaalimerkintää ja joka siksi on tärkeä osa matematiikan oppimista. Vaikka oppilaat hallitsisivat paikkajärjestelmän käytön kokonaislukujen kohdalla, he eivät tavallisesti käytä sitä desimaalilukujen suhteen. Paikkajärjestelmään liittyviä laajennuksia ja yleisiä ominaisuuksia olisi käsiteltävä riittävästi opiskeltaessa desimaalilukuja, jotta ymmärretään paikkajärjestelmää myös desimaalilukujen tapauksessa. (Behrens, 2015; Hunter, Turner, Russel, Trew, & Curry, 1994; Moody, 2011)

Ihmisillä on tapana olla antamatta periksi kohdatessaan jonkin tuntemattoman ongelman, vaan he rakentavat omat säännöt ja toimintamallit sen ratkaisemiseksi yleistäen jo opittuja käsitteitä. Nämä toimintamallit ovat järkeviä niille, jotka ne ovat luoneet, mutta ne voivat johtaa virheellisiin ratkaisuihin. (MacDonald, 2008) Eräs virheellinen toimintamalli on se, että desimaalipilkku sivuutetaan kokonaan. Tämä aiheuttaa vaikeuksia erityisesti laskiessa desimaaliluvuilla, jolloin numerot ovat väärin kohdistettuja. Esimerkiksi laskiessa $2{,}578 + 25{,}78$ lasketaan $2 + 2, 5 + 5, 7 + 7, 8 + 8$ ja desimaalipilkku laitetaan sitten vain joko ensimmäisen ja toisen numeron tai toisen ja kolmannen numeron väliin. Toinen usein toistuva ongelma desimaalilukujen tapauksessa on niiden järjestäminen suuruusjärjestykseen. Tähän ongelmaan liittyy muutama oppilaiden itse kehittämä toimintatapa. Ensimmäinen toimintatapa on luvun desimaaliosan erottaminen kokonaislukuosasta, erityisesti ykköstä pienemmissä luvuissa. Tällöin ajatellaan esimerkiksi, että luku $0{,}7$ on pienempi kuin luku $0{,}37$, koska luku 7 on pienempi kuin luku 37. Toinen suuruusvertailuun liittyvä strategia on se, että kymmenesosien ajatellaan olevan paljon isompia kuin sadasosat, jolloin esimerkiksi luku $12{,}94$ on pienempi kuin luku $12{,}7$ tai luku $0{,}5$ on suurempi kuin luku $0{,}61$. (Behrens, 2015; Hunter ym., 1994; Moody, 2011; Sowder, 1997)

Syntyviä vääriä toimintatapoja voidaan yrittää estää myös sillä, että kiinnitetään erityistä huomiota desimaalilukujen nimeämiseen. Esimerkiksi luku $0{,}642$ on 642 tuhannesosaa, eikä 642 ykköstä. Monille voi jäädä väärä mielikuva, jos asioista ei puhuta niiden oikeilla nimillä. Erityisesti nollan rooli on ongelmallinen desimaalilukujen tapauksessa. (Moody, 2011; Sowder, 1997) Oppilaat, jotka yrittävät ymmärtää matematiikasta jotain, menevät helposti sekaisin, jos heille kertoo, että “lisätkää nollia luvun perään niin, että niistä tulee saman kokoisia”. Tämä strategia ei kehitä minkäänlaista ymmärrystä desimaalilukujen suuruudesta. Esimerkiksi vertaillessa lukuja $0{,}45$ ja $0{,}6$ olisi tarkoituksenmukaisempaa odottaa oppilailta heidän ymmärtävän, että kuusi kymmenesosaa on yhtä suuri kuin 60 sadasosaa (Sowder, 1997, s.115). Muita samantyylisiä virhekäsityksiä, jotka syntyvät puheen seurauksena on esimerkiksi sääntö “kun kerrotaan kymmenellä, laitetaan nolla loppuun”. Tästä virheellisestä muistisäännöstä ja kymmenjärjestelmän hallinnan puutteesta seuraa esimerkiksi virhe $10 \cdot 1{,}4 = 1{,}40$ (Ikäheimo, 2002, s. 77).

MacDonald (2008) törmäsi omassa tutkimuksessaan toiseen nimeämiseen liittyvän väärinymmärrykseen. Eräs oppilas ihmetteli, miksi desimaalipilkun jälkeen ensimmäisenä ei ole arvo “yhdesosat” (eng. “oneths”)? Tämä väärinkäsitys oli syntynyt siitä, koska pilkun vasemmalla puolella on ykköset, kymmenet, sadat, tuhannet jne. niin pilkun oikealle puolelle on tultava samat sillä erotuksella, että lisätään tavu “-osa” sanan perään. Myös muut opettajat ja tutkijat olivat huomanneet saman ilmiön. He ovat ehdottaneet, että tämä väärinkäsitys liittyy desimaalimerkinnän symmetriaan. Desimaalipilkku toimii tässä “peilinä”. Jos haluaa käyttää peili-metaforaa muistikeinona, on tärkeää muistaa, että peilinä toimii ykköset, eikä desimaalipilkku. Tämä väärinkäsitys saatiin korjattua palauttamalla mieleen, mitä ne kymmenesosat ja sadasosat oikeasti edustavat, jolloin oppilas ymmärsi, että “yhdesosat” (eng. “oneths”) olisi sama asia kuin yksi kokonainen, sillä esimerkiksi $\frac{8}{1} = 8$. (MacDonald, 2008)

Yhteenvetona voisi sanoa, että desimaaliluvut ovat hankala asia oppilaille. Mutta desimaaliluvut, kuten muutkin abstraktit ja vaikeasti ymmärrettävät asiat, ovat paremmin ymmärrettäviä, kun oppilaat käyttävät toimintamateriaaleja niiden oppimiseen (Kennedy, 1986, s. 7). Ikäheimon (2002) tutkimus tukee Kennedyn (1986) ajatusta siitä, että kymmenjärjestelmävälineiden käyttäminen opetuksen tukena lisää ymmärrystä desimaaliluvuista. Näitä välineitä olisi hyvä käyttää erityisesti aluksi, kun lähdetään laskemaan desimaaliluvuilla, ja myöhemmin sitten tarvittaessa.

2.3. Toiminnallinen opettaminen ja erilaisia kymmenjärjestelmävälineitä

Uudessa opetussuunnitelmassa korostetaan toiminnallisuuden ja konkretian merkitystä matematiikan opiskelussa (OPS, 2014), mutta mitä toiminnallisuudella tarkoitetaan? Rossin ja Vainio-Rantasen mukaan “opetuksen toiminnallisuus tarkoittaa materiaalin avulla oppimista siten, että tutkitaan, kokeillaan ja konkretisoidaan yksin, pareittain, ryhmässä tai koko luokkana” (Rossi & Vainio-Rantanen, 1994, s.126). Tällöin oppilaat yleensä käyvät vilkasta keskustelua keskenään ja liittävät toimintamateriaalin avulla saatuja havaintoja arkielämän tilanteisiin, mikä tukee oppilaiden käsitteiden muodostumista ja asioiden ymmärtämistä (Ikäheimo, 2002; Ikäheimo & Risku, 2004; Lindgren, 1990; Rossi & Vainio-Rantanen, 1994). On kuitenkin muistettava, että oppimisen tavoitteena ei itsessään ole toimintamateriaalin käyttö, vaan toimintamateriaali toimii ainoastaan “polkuna” kohti oppimistavoitteita (Lindgren, 1990).

Toimintamateriaaleja on useita erilaisia ja niitä voidaan hankkia usealla eri tavalla. Useita eri toimintamateriaaleja voi ostaa valmiina tai sitten opettaja voi itse luoda haluttua materiaalia, joko yksin tai oppilaiden kanssa. Kouluista löytyy useimmiten myös valmista materiaalia, jota voi soveltaen käyttää useampaan eri tarkoitukseen. (Rossi & Vainio-Rantanen, 1994) Kennedyn (1986) mukaan toimintamateriaalit ovat esineitä, jotka edustavat matemaattisia ideoita ja joita voidaan kosketella, siirrellä sekä uudelleen järjestää. Ne voivat olla ympäristön kohteita, kuten rahaa tai materiaaleja, jotka ovat erityisesti suunniteltu matemaattisten käsitteiden opettamiseen, kuten esimerkiksi kymmenjärjestelmäpalikat. Myös Mark Driscoll määrittelee toimintamateriaalin samalla tavalla. Hyvän toimintamateriaalin eräänä piirteenä on materiaalin itseohjautuvuus, eli se ohjaa oppilaita huomaamaan itse mahdolliset virheet. (Kennedy, 1986; Lindgren, 1990) On hyvä muistaa, että toimintamateriaalina voidaan käyttää sekä tietokoneita että ihan konkreettisia välineitä. Oppilailla on oltava mahdollisuus valita kumpaa haluaa käyttää. Valintamahdollisuutta hankaloittaa se, että monella koululla ei välttämättä ole tarjolla konkreettisia välineitä, vaikka tietokoneita on. (Ikäheimo, 2002) Hyvin valittu ja asianmukaisesti käytetty toimintamateriaali parantaa lasten oppimista, herättää kiinnostusta, lievittää ikävystymistä sekä edistää ongelmanratkaisu- ja laskutaitoja. Hyödyllisiksi todettuja toimintamateriaaleja on suositeltavaa käyttää kaikilla luokka-asteilla, vaikka niitä käytetään tavallisesti enemmän peruskoulun alemmilla luokilla. (Kennedy, 1986; Lindgren, 1990)

Alemmilla luokilla matematiikan opiskelussa käytetään intuitiivisesti esimerkiksi sormia tai piirtämistä apuna, jonka seurauksena malli ja käsite samaistuvat (Yrjönsuuri, 2004). Miksi toimintamateriaalin käyttö vähenee sitten ylemmille luokille siirryttäessä? Eräs selitys voi olla se, että oppilaat luopuvat itse välineiden käytöstä, leimautumisen pelossa. Hunterin ym. (1994) tutkimuksessa tuli nimittäin ilmi, että konkreettisten toimintamateriaalien käyttö yhdistettiin kyvyttömyyteen selviytyä “kunnon” matematiikasta. Yleisesti ottaen toimintamateriaali kuitenkin motivoi oppilaita ja luo usein onnistumisen tunteita, jotka taas kannustavat eteenpäin (Ikäheimo, 2002; Rossi & Vainio-Rantanen, 1994).

Vaikka hyvin toimivan toimintamateriaalin valitseminen on olennainen osa toiminnallista opetusta, myös se, miten valittua materiaalia käytetään ei ole merkityksetöntä. Opettajalla on keskeinen rooli ohjatessaan oppilaita materiaalien käyttämiseen. (Lindgren, 1990) Opettajan on suunniteltava ja ohjattava materiaalin käyttöä tarkkaan, jotta saavutetaan haluttu oppimistavoite. Välineistä ei ole mitään apua, jos oppilaat eivät osaa käyttää niitä tai käyttävät väärin. (Ikäheimo, 2002) Opettajan keskeisestä roolista huolimatta toimintamateriaalia käytettäessä oppilaalla on oltava aktiivinen rooli. Toimintamateriaalien on oltava jatkuvasti saatavilla ja niitä on oltava tarpeeksi, mielellään jokaiselle oppilaalle tai vähintään oppilasparille. Toimintamateriaalin käyttöön on lisäksi varattava riittävästi aikaa, jotta jokaisella oppilaalla on mahdollisuus edetä yksilölliseen tahtiin omien taitojensa mukaan. Oppilailla on suositeltavaa olla mahdollisuus käyttää toimintamateriaalia niin kauan, että he omatoimisesti lopettavat niiden käytön. (Ikäheimo & Risku, 2004) Toimintamateriaalin käytön ei aina tarvitse olla ohjattua, vaan oppilaiden on saatava käyttää välineitä apunaan laskettaessa (Ikäheimo, 2002). Ikäheimon (2002) mukaan motivoivia oppimispelejä ja havainnollistamisvälineitä, joita tarvitaan opetuksen konkretisoimiseen, on käytössä niukasti.

Vaikka toiminnallista opettamista on tutkittu paljon, toimintamateriaalin käyttö jakaa opettajat kahteen ryhmään. Toisten mielestä toimintamateriaalit parantavat lasten ymmärrystä oppimastaan matematiikasta, toiset taas eivät ole vakuuttuneita toimintamateriaalin käytön tärkeydestä. Monet tutkimustulokset kuitenkin tukevat toimintamateriaalien käyttöä. (Kennedy, 1986) Galperin tutkimuksista ilmenee vakuuttavasti konkreettisten toimintamateriaalien merkitys kaiken uuden henkisen toiminnan oppimisessa. Hänen mukaansa oppimisessa keskeistä ovat asioiden ja ilmiöiden väliset suhteet. Galperin teoria perustuu ulkoisen toiminnon muuntumiseen sisäiseksi ymmärrykseksi. Tämä tapahtuu viidessä vaiheessa, jotka ovat orientoimisvaihe, materiaalinen vaihe, puhuttu vaihe, sisäisen puheen vaihe ja lopulta sisäistynyt vaihe. Uuden oppimisessa merkittävä rooli on orientoimisvaiheella, mutta materiaalisen vaiheen jättäminen pois aiheutti suurimmat oppimisvaikeudet. Täten Galperin tutkimukset osoittavat kuinka ratkaiseva rooli konkreettisella toimintamateriaalilla on uuden asian sisäistämiseksi. (Ikäheimo, 2002; Ikäheimo & Risku, 2004; Lindgren, 1990) Toimintamateriaalien käyttöä tukee myös Piaget, jonka mukaan lapsen omakohtaisella kokemuksella on keskeinen merkitys matemaattisten käsitteiden ja operaatioiden perustana. Hänen mukaansa korkeamman tason ajattelu pohjautuu aiemman tason ajattelulle. Jotta ylemmän tason verbaalinen ymmärtäminen olisi saavutettavissa, tarvitaan konkreettista esineiden manipulointia. (Ikäheimo, 2002; Lindgren, 1990)

Piagetin tapaan Dienes nosti esille konkreettisen materiaalin käyttöä opetuksessa ja oppilaiden aktiivista roolia oppimisessa. Dienesin mukaan leikki on välttämätöntä käsitteiden muodostuksessa. Dienes tutki konkreettisten materiaalien käyttöä kahdella erilaisella menetelmällä; uni-model- ja multi-model-menetelmällä. Uni-model-menetelmässä matematiikan käsitteiden rakennetta havainnollistettiin vain yhdellä konkreettisella materiaalilla, tässä tapauksessa Crusenaire- tai Stern-palikoilla. Multi-model-menetelmässä loogisen struktuurin havainnollistamiseksi käytettiin useaa erityyppistä, mutta loogisesti samankaltaista materiaalia, jotta saadaan luotua pohja laajempaan yleistettävyyteen. Tutkimustulosten perusteella pääteltiin, että uni-model-menetelmä ei tarjoa oppilaille riittävän monipuolista kokemusta opiskeltavasta asiasta, kun taas multi-model-menetelmä ohjaa taitavasti kohti todellista asioiden ymmärtämistä sekä parempaa mekaanista laskutaitoa. Multi-model-menetelmästä oli hyötyä erityisesti heikommilla oppilailla ja sen ryhmän oppilailla oli positiivisempi asenne matematiikkaa kohtaan. Näihin tuloksiin täytyy kuitenkin suhtautua pienellä varauksella, koska tuota multi-model-ryhmää Dienes opetti itse. Tutkimustulosten perusteella Dienes kokosi ajatuksensa monipuolisten kokemusten tarpeellisuudesta neljäksi periaatteeksi. Ensimmäisenä on dynaamisuuden periaate, jonka mukaan tarvitaan eritasoisia “leikkejä” jaksoittain, jotta todellisuudessa ymmärretään uudet käsitteet. Konstruktiivisuuden periaatteen ideana on tarjota lapselle mahdollisuus luoda käsite itselleen ymmärrettävään muotoon intuitiivisesti omien monipuolisten kokemusten avulla. Matemaattisen varioinnin periaate perustuu siihen, että itse käsitteen kannalta epäoleellisia osia varioidaan. Tähän liittyen Dienes loi “Multibase Arithmetic Blocks” (MAB) välineistön havainnollistamaan paikkajärjestelmää ja niitä lukujärjestelmiä, joiden kantaluku ei ole 10. Näitä välineitä on edelleen käytössä. Viimeinen eli havainnon varioinnin periaate perustuu nimenomaan hyvään tulokseen multi-model-menetelmässä. Sen mukaan lapsi tarvitsee useampaa erilaista kokemusta, jotta hän oppii käsitteen. Dienesin mukaan uutta käsitettä ei opita vain yhdentyyppisellä kokemuksella. (Lindgren, 1990)

Piagetin ja Dienesin lisäksi myös Magne korostaa omakohtaisen kokemusten yhteyttä uuden asian oppimiseen. Niin ikään Driscoll painottaa toimintamateriaalien auttavan lasta ymmärtämään matemaattisia käsitteitä, korostaen erityisesti opettajan vastuuta ohjata materiaalien oikeanlaiseen käyttöön. (Lindgren, 1990) Driscollin mukaan toimintamateriaalia voidaan käyttää myös korjaamaan jo syntyneitä vaikeuksia (Kennedy, 1986). Toiminnallisen opettamisen avulla voidaan saada apua myös matematiikkavaikeuksissa (Huhtala & Laine, 2004). Ikäheimon & Riskun (2004) mukaan jopa oppimisvaikeuksia voi ehkäistä erilaisia välineitä käyttämällä ja keskittyen olennaiseen. Koska matematiikka on hierarkkinen oppiaine, uuden asian opiskelu on todella hankalaa, jos oppilas ei hallitse edellistä asiaa (Ikäheimo, 2002). Ikäheimo & Risku (2004) vertaavat hyvin matematiikan osaamista taloon. Heidän mukaansa “Matematiikan osaaminen syntyy samaan tapaan kuin talo. Sille on ensin tehtävä kestävä perustus, jonka päälle myöhempi oppiminen lujasti rakentuu. Jos perustukseen jää tai ilmaantuu aukkoja, ne pitää korjata ennen kuin korotetaan seiniä” (Ikäheimo & Risku, 2004, s. 239). Toiminnallisuuden ja konkreettisten mallien avulla saadaan rakennettua vahva perusta.

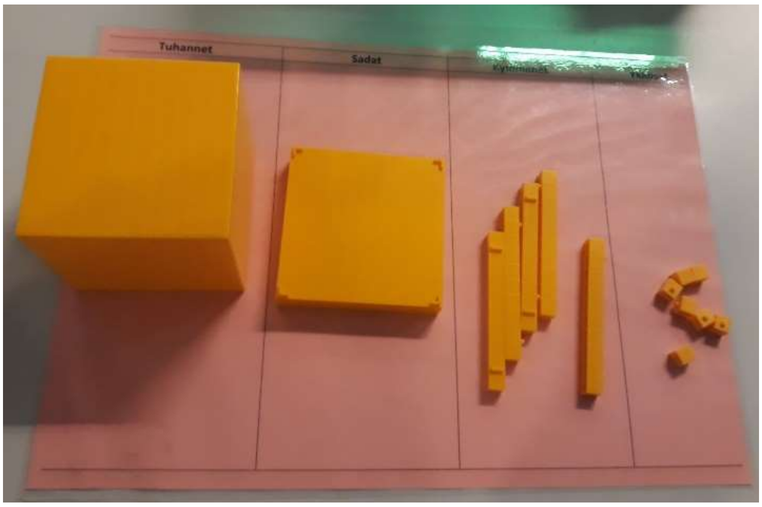
Italialainen lääkäri Maria Montessori oli ensimmäisiä pedagogeja, joka alkoi tuottamaan ja kehittämään konkreettista oppimismateriaalia, jota hän kutsuu didaktiseksi materiaaliksi, josta olisi apua matemaattisten käsitteiden opiskeluun (Lindgren, 1990). Montessorin mukaan lapsen kehityksessä on neljä kehityskautta, joista jokaiseen eri vaiheeseen kuuluu herkkyyskausia, jolloin oppiminen sujuu lapselta helposti ja iloisesti (Ikäheimo, 2002). Montessorin mukaan opettajalla on velvollisuus luoda sellainen oppimisympäristö, jossa tarkoin valitut materiaalit ovat oppilaiden vapaassa käytössä. Hänen kehittämän materiaalin tarkoitus on auttaa lasta oivaltamaan uusia asioita oman työnsä kautta. (Ikäheimo, 2002; Lindgren, 1990) Kymmenjärjestelmän opettamiseen Montessori on kehittänyt kultaiset helmet, jossa ykköstä vastaa pieni helmi, kymmentä edustaa kymmenen yhteen liitettyä helmeä, sata koostuu kymmenestä kymmenen yhteen liitetyn helmen kokoelmasta, jotka muodostavat levyn, ja tuhat rakennetaan kymmenestä satalevystä (Ikäheimo, 2002). Montessori-materiaalien kehno puoli on niiden korkeat hinnat (Lindgren, 1990).

Onneksi kymmenjärjestelmän havainnollistamiseen konkreettisesti löytyy myös edullisempia vaihtoehtoja. Erityisesti lukujen $0-10$ havainnollistamiseen voidaan käyttää lapsen lähiympäristöstä löytyviä esineitä. Lukujen havainnollistamiseen voidaan käyttää esimerkiksi sormia, (itsetehtyjä) puuhelmiä, multilink-kuutioita tai vaikka euron kolikoita. Monia näistä välineistä voi käyttää myös siirryttäessä tutkimaan isompia lukuja tai desimaalilukuja. Esimerkiksi opetusrahat sopivat siirtymävaiheeseen hyvin, kun voidaan euron kolikon lisäksi käyttää 10 ja 100 euron seteleitä tai desimaalilukujen tapauksessa 10 ja yhden sentin kolikoita. Opetusrahat sopivat myös siirryttäessä laskemaan erilaisilla luvuilla. (Ikäheimo, 2002) Toinen edullinen vaihtoehto on tikkujen käyttäminen niin, että yksi tikku vastaa ykköstä ja kymmenen tikun nippu vastaa kymmentä. Kuvassa 1 on esitetty luku 14 tikkujen avulla. Solovieva ym. (2013) on tutkinut juuri tämän havainnollistamismenetelmän käyttöä meksikolaisen koulun oppilaiden kanssa ja huomannut, että lopussa oppilaat pystyvät tunnistamaan luvun numeroiden paikka-arvon, kirjoittamaan luvut oikein, suorittamaan aritmeettisia operaatioita ja ymmärtämään kymmenjärjestelmän suhteita. (Solovieva ym., 2013)

Kuva 1: Luku 14 esitettynä tikkujen avulla

Varmasti yksi eniten käytetyistä kymmenjärjestelmävälineistä on muoviset tai puiset kymmenjärjestelmävälineet. Näissä välineissä ykköstä vastaa kuutiosenttimetrin kokoinen kuutio, kymmenestä ykköskuutiosta koostuva sauva edustaa kymmentä, sata on satalevy, joka muodostuu, kun kymmenen kymmensauvaa liitetään yhteen, ja tuhat on kymmenestä satalevystä koostuva kuutio. Eri malliset kappaleet voivat olla joko erivärisiä tai sitten samanvärisiä, jolloin vain muoto ja koko erottaa ne toisistaan. (Hunter ym., 1994; Ikäheimo, 2002; Lindgren, 1990) Kuvassa 2 on esitetty luku 1157 näiden kymmenjärjestelmävälineiden avulla. Jos halutaan tutkia suurempia lukuja, oppilaiden kanssa voi rakentaa esimerkiksi kymmentuhatsauvan tai satatuhatlevyn samalla periaatteella (Ikäheimo, 2002).

Hunter ym. (1994) ovat tutkineet paikka-arvon opiskelua ja ymmärtämistä juuri näiden kymmenjärjestelmävälineiden avulla. Monet heidän tutkimukseen osallistuvista oppilaista olivat kyllä nähneet nämä kymmenjärjestelmävälineet ennenkin, mutta silti useat oppilaat käyttivät vain ykköskuutioita esittäessään lukuja kahteenkymmeneen asti. Muita välineitä oppilaat eivät käyttäneet spontaanisti, vaan niiden käyttöön piti kannustaa. Pyydettäessä oppilaita sijoittamaan välineitä luvun alapuolelle, lähes 30% tutkimukseen osallistuneista ei ottanut huomioon paikkojen arvoa vaan he sijoittivat välineitä mihin tahansa numeroon. Heidän mielestä sillä ei ole merkitystä mihin eri välineet sijoittaa, koska määrä pysyy kuitenkin samana. Monet heistä osasivat kyllä valita oikeat välineet, mutta liittivät ne vain numeron kokoon ei paikka-arvoon. Esimerkiksi luku 11 voitaisiin esittää yhdellä kymmensauvalla ja yhdellä ykköskuutiolla, mutta järjestyksellä ei ollut väliä, vain koko oli tärkeä. He eivät siis olleet sisäistäneet paikka-arvon merkitystä. Lisäksi tutkimuksesta selvisi, että oppilaat osasivat laittaa kymmenjärjestelmävälineet oikeaan paikka-arvoon paremmin suurempien lukujen kohdalla kuin pienempien. Yksi syy tähän saattaa olla moninumeroisten lukujen sanallinen esitys. Esimerkiksi luvusta kaksi**tuhatta** kolme**sataa** neljä**kymmentä**kolme on helpompi päätellä montako esinettä tarvitaan kunkin paikka-arvon kohdalle, kuin luvusta kaksitoista. Eniten vaikeuksia oppilailla oli luvun 10 tapauksessa. Yleensä kymmensauva laitettiin numeroiden 1 ja 0 keskelle, koska heidän mielestä luku 10 on kokonaisuus, jota ei voi jakaa. (Hunter ym., 1994) Opettajan rooli on jälleen avainasemassa, jotta oppilaat oppivat paikka-arvon merkityksen. Lindgren (1990) kokeili omassa matikkatupakokeilussa (jossa tokaluokkalaisille opetettiin erilaisten toiminnallisten välineiden avulla kymmenjärjestelmää) myös näitä muovisia kymmenjärjestelmävälineitä. Hänen tutkimuksen mukaan juuri kyseisistä välineistä hyötyivät eniten hyvät oppilaat. Kymmenjärjestelmävälineiden käyttö on hyvin opettavaa myös muille ryhmille, mutta heikommat oppilaat tarvitsevat huomattavan paljon aikaa ja ohjausta, jotta pystyvät sisäistämään välineiden tarjoaman hyödyn. (Lindgren, 1990)



Kuva 2: Luku 1157 esitettynä kymmenjärjestelmävälineiden avulla

Näitä muovisia kymmenjärjestelmävälineitä voidaan käyttää myös desimaaliluvuilla laskiessa. Nykyään saa ostettua myös muovisia kymmenesosalevyjä (jotka ovat kooltaan nimensä mukaisesti kymmenesosa ykköskuution koosta), sadasosasauvoja ja tuhannesosakuutioita. Nämä ovat kuitenkin hyvin pieniä, jolloin varsinkin nuorempien oppilaiden voi olla hankalaa käyttää niitä. Desimaaliluvuilla voidaan kuitenkin laskea vain ykköskuutioita ja sitä suurempia välineitä apuna käyttäen. Se voidaan tehdä esimerkiksi päättämällä, että tuhatkuutio vastaakin nyt ykköstä, jolloin ennen ykkösiä edustanut kuutio vastaakin nyt tuhannesosia (Sowder, 1997). Kun desimaaliluvut rakennetaan ensin kymmenjärjestelmävälineiden avulla ja myöhemmin liitetään desimaalilukujen opettamiseen oppilaiden kokemus rahoista, mittaamisesta ja yksikkömuunnoksista, saadaan lisättyä oppilaiden ymmärrystä desimaaliluvuista (Ikäheimo, 2002). Koska useat eri esitysmuodot ja vaihtelevat tilanteet auttavat desimaalilukujen oppimisessa (Moody, 2011), on niiden opettamiseen kehitetty myös muita välineitä. Australialainen Bruce Moody on kehittänyt desimaalilukujen havainnollistamiseen välineistön, jota hän kutsuu nimellä “decipipes”. “Decipipes” ovat eräänlaisia eripituisia ohuita putkia, jossa yksi pidempi putki vastaa ykköstä ja sitten se putki on jaettu kymmeneen yhtä pitkään osaan, jotta on saatu kymmenesosat sekä muut pienemmät osat vastaavasti. Näiden välineiden on tarkoitus auttaa oppilaita ymmärtämään desimaalilukujen paikka-arvon merkitys sekä auttaa oppilaita desimaaliluvuilla laskemisessa. (Moody, 2011) Yhdessä konkreettisten materiaalien kanssa on suositeltavaa käyttää myös visuaalisia kuvia, kehitettäessä asianmukaista käsitystä paikka-arvosta. Nämä kaksi yhdistyvät netissä toimivassa paikka-arvotaulukossa, jonka on kehittänyt Kortenkamp. Tämän nettiversion tärkein toiminto on esitysmuodon vaihtelu siirtämällä palikoita sarakkeesta toiseen, samalla kun luku säilyy muuttumattomana. Esimerkiksi siirrettäessä kymmenistä yksi esine ykkösiin, sinne tulee automaattisesti kymmenen esinettä. Vertailtaessa yleisimpiin kymmenjärjestelmävälineisiin, tämän etuna on se, että ohjelma ei havainnollista erityisiä paikka-arvoja eri kokojen ja muotojen mukaan, vaan ainoastaan sen sijainnilla taulukossa on merkitystä. Tällöin paikkajärjestelmän sijainti ominaisuutta korostetaan ja siirrytään desimaalilukujen oppimisessa abstraktimmalle tasolle. (Behrens, 2015)

Desimaalilukujen lisäksi, myös kokonaislukujen paikkajärjestelmän havainnollistamiseen on kehitetty abstraktia ajattelua vaativa kaarihelmitaulu (kuva 3). Se saattaa kuitenkin olla liian abstrakti nuoremmille 1.- ja 2.-luokkalaisille, eikä sitä ole suositeltavaa käyttää liian aikaisin paikkajärjestelmän havainnollistamiseen. Kaarihelmitaulun ideana on se, että yksi helmi vastaa eri lukua, riippuen sen paikasta. Esimerkiksi yksi helmi kymmenten kaarella vastaa kymmentä helmeä ykkösten kaarella ja niin edelleen. (Ikäheimo, 2002)

Kuva 3: Helsingin yliopiston kasvatustieteen laitoksella oleva kaarihelmitaulu

Kymmenjärjestelmän opettamiseen on kehitetty myös erilaisia pelejä. Eräs peli, jossa rahojen ja erilaisten oppilaiden keksimien tarinoiden avulla pyritään vahvistamaan kymmenjärjestelmän oppimista, on Ikäheimon suunnittelema Ten Base-peli (Ikäheimo, 2002, s. 144-145). Ten Base-peli kehittää myös keskustelutaitoa, kun siinä keskustellaan koko ajan ryhmän kanssa (Ikäheimo, 2002). Lindgren (1990) käytti hänen matikkatupakokeilussa myös useita erilaisia kymmenjärjestelmän ymmärtämistä tukevia pelejä. Yksi näistä peleistä oli niin sanottu niputuspeli (Lindgren, 1990, s.95-96), jonka tavoitteena oli kantaluvun 10 ymmärtäminen. Ideana pelissä oli kerätä mahdollisimman nopeasti kolme kymmenen tikun nippua, nostamalla aina nopan osoittaman määrä tikkuja. Tästä niputuspelistä oli hyötyä erityisesti heikoilla oppilailla. (Lindgren, 1990) Ten Base-peli ja niputuspeli ovat hyvät esimerkit siitä, miten pelejä löytyy niin kalliina maksullisena pelinä kuin halpana yksinkertaisilla välineillä toteuttavissa olevana pelinä.

Lindgrenin (1990) tutkimukset ovat osoittaneet toimintamateriaalin käytöllä olevan merkittävä vaikutus paikkajärjestelmälaskujen osaamiseen. Erilaisilla toiminnallisilla välineillä ja peleillä työskentely ei huonontanut oppimistuloksia, vaan päinvastoin jollain oppilasryhmillä saavutettiin jopa parempia tuloksia, kuin perinteisellä opetustyylillä. On siis suotavaa antaa tilaa oppilaan omalle aktiivisuudelle ja mahdollisuudelle käyttää toiminnallista materiaalia, eikä välttämättä tarvitse ottaa oppikirjaa heti käyttöön. (Lindgren, 1990)

2.4. Matemaattinen ajattelu ja matematiikan oppiminen

Tutkiessa oppilaiden kymmenjärjestelmän ja sen ominaisuuksien oppimista on oleellista keskittyä matemaattisen ajattelun kehittymiseen ja siihen, miten matematiikan oppiminen tapahtuu. David Tall (2008) on tutkinut matemaattisen ajattelun muutosta aina sieltä varhaislapsuudessa alkavasta perusmatemaatikasta kirjalliseen formaaliseen todistukseen asti. Tallin mukaan ajattelun muutos muotoillaan “matematiikan kolmen maailman” avulla. Jokaisella “maailmalla” on oma kehitysvaihe ja omat todistusmuodot, joita voidaan sekoittaa keskenään muodostaakseen runsaasti erilaisia ajattelutapoja. Tallin tarjoama teoria kolmesta matematiikan maailmasta tarjoaa hyvän kehyksen, jonka avulla voidaan tulkita matemaattista oppimista ja ajattelua kaikilla tasoilla varhaisimmasta matematiikasta aina matemaattiseen tutkimukseen asti. (Tall, 2008)

Tallin mukaan on olemassa kolme olennaista ja inhimillistä ominaisuutta, jotka ovat oleellisia matemaattiselle ajattelulle, mutta joiden kypsyminen voi kestää jonkin aikaa. Tall käyttää termiä “set-before” kuvaamaan näitä ominaisuuksia, jotka ovat jo syntymässä geeneissämme. Kyseiset ominaisuudet (set-befores) muovaavat pitkän aikavälin oppimista ja saavat ajattelemaan matemaattisesti tietyillä tavoilla. Matemaattinen kehittyminen riippuu syvästi näistä kolmesta ominaisuudesta. (Tall, 2008)

Ensimmäinen näistä kolmesta ominaisuudesta on kuvioiden, yhtäläisyyksien ja erojen tunnistaminen. Kuvioiden tunnistaminen on olennainen taito matematiikassa, niin muotojen kuin numeroidenkin osalta. Toinen ominaisuus on peräkkäisten toimintojen toistaminen niin kauan, että ne automatisoituvat, joka on välttämätöntä oppimisprosessin kannalta. Viimeinen näistä perustavaa laatua olevista ominaisuuksista on kieli ja sen käyttäminen kuvailemaan ja tarkentamaan tapaa, jolla ajattelemme asioita. Juuri kielen voima mahdollistaa tärkeisiin käsitteisiin keskittymisen, niiden nimeämisen sekä niistä keskustelemisen. (Tall, 2008)

Henkilökohtainen kehitys (eng. personal development) perustuu yksilön aiempiin kokemuksiin sekä yksilön sopeutumiseen uusiin tilanteisiin. Aikaisemmista kokemuksista Tall käyttää termiä "met-befores". Aikaisemmat kokemukset (met-befores) muodostavat yhteyksiä aivoissa, jotka vaikuttavat siihen, miten uusia tilanteita ymmärtää. Toisinaan aiemmat kokemukset (met-befores) ovat johdonmukaisia uuden tilanteen kanssa, joskus taas epäjohdonmukaisia. Näin ollen aiemmat kokemukset (met-befores) voivat vaikuttaa alitajuisesti siihen miten uusia asioita matematiikassa tulkitaan. Toisinaan ne edesauttavat oppimista, mutta joskus aiemmat kokemukset voivat aiheuttaa sisäistä sekaannusta, joka estää oppimista. Oppiminen tapahtuu muotoilemalla vanhat tiedot uudella tavalla sekä muuttamalla ajattelutapaa, samalla kun kasvaa kypsemmäksi. (Tall, 2008)

Matemaattista kehittymistä kuvaavat kolme matematiikan maailmaa ovat Tallin mukaan käsitteellis-ruumiillinen (eng. conceptual-embodied), proseptuaalis-symbolinen (eng. proceptual-symbolic) sekä aksiomaattis-formaali (eng. axiomatic-formal) maailma. Käsitteellis-ruumiillinen maailma perustuu havainnolliseen esitykseen uusista käsitteistä. Käsitteellinen havainnollistaminen viittaa käsitteiden erilaisiin representaatioihin ja se kehittyy tasaisesti yksilön kypsyessä. Esimerkiksi erilaisten esineiden ominaisuuksien havaitseminen kuuluu käsitteellis-ruumiilliseen maailmaan. Proseptuaalis-symbolinen maailma kehittyy käsitteellis-ruumiillisen maailman toiminnan (kuten laskemisen) ja käsitteen symboloinnin (kuten luvun) kautta. Symbolit toimivat siis sekä prosesseina (esim. laskutoimitus $3 + 2$) että prosessin tuottamana käsitteenä (esim. laskutoimituksen vastaus, eli luku 5). Aksiomaattis-formaali maailma perustuu muodollisiin määritelmiin ja matemaattiseen todistamiseen. Jo tunnetut matemaattiset käsitteet saavat tässä vaiheessa tarkemman teoreettisiin määritelmiin perustuvan muodon. Aksiomaattisen formalisoinnin pääasiallinen ero havainnollistamiseen perustuvaan perusmatematiikkaan ja symboliseen perusmatematiikkaan on se, että perusmatematiikassa määritelmät syntyvät kokemuksista erilaisista välineistä, joiden ominaisuuksia kuvataan, kun taas muodollisessa matematiikassa esitykset alkavat teoreettisilla määritelmillä ja muodollisen todistuksen avulla päätellään muut ominaisuudet. (Tall, 2008)

Koulumatematiikka perustuu fyysisesti ilmeneviin käsitysten ja toimintojen kehitykseen. Tutkitaan erilaisia muotoja, asetetaan niitä kokoelmiin, lasketaan ja mittaillaan. Kun näitä toimintoja harjoitetaan ja niistä tulee rutiinia, niitä voidaan symboloida numeroina ja niitä voidaan käyttää operaatioina. Kun huomion painopiste siirtyy havainnollistamisesta symbolien manipulointiin, matemaattinen ajattelu siirtyy käsitteellis-ruumiillisesta maailmasta kohti symbolisen ajattelun maailmaa. Kirjallinen formaali todiste on matemaattisen ajattelun viimeinen vaihe. (Tall, 2008) Kymmenjärjestelmän tapauksessa voidaan esimerkiksi aloittaa kysymällä pieneltä lapselta, montako omenaa korissa on. Jo hyvin nuori lapsi osaa vastata tähän, vaikka ei numeroita kuviona tuntisi. Tämän jälkeen tutustutaan numeroihin ja sitten siirryttäessä proseptuaalis-symboliseen maailmaan, päästään jo erilaisiin laskutoimituksiin. Tallin kolmea eri maailmaa voidaan myös sekoittaa keskenään, esimerkiksi käyttämällä kymmenjärjestelmäruudukkoa ja allekkain laskua rinnakkain, juuri niin kuin tässä tutkimuksessa tehtiin.

Ihmisen aivot ovat erittäin monimutkaisia, mutta ne ovat myös yllättävän rajallisia, sillä ne pystyvät käsittelemään vain vähän tietoa kerrallaan. Useiden artikkeleiden mukaan se luku on noin 7 ± 2. Ihmisen aivot selviytyvät suuremmasta määrästä tietoa yhdistämällä ajatukset yhteen "ajateltavissa oleviksi käsitteiksi" (eng. thinkable concepts). Tämä tapahtuu useilla eri tavoilla. Yleisesti ottaen, kun kohdataan uusi tilanne, sitä tulkitaan yhdistelemällä sitä aikaisempiin kokemuksiin (met-befores). (Tall, 2008)

Tieto koostuu käsitteistä, joita ihminen jäsentää ja uudistaa mielessään jatkuvasti (Yrjönsuuri, 2004). Tietoa voi olla erityyppistä. Yksi merkittävä ero on konseptuaalisen eli käsitteellisen sekä proseduraalisen eli menetelmällisen tiedon välinen ero. Konseptuaaliseen tietoon kuuluu asian ymmärtäminen ja tiedostaminen "miksi jokin asia toimii tietyllä tavalla". Matemaattisten käsitteiden ja niihin liittyvien näkökulmien ja ongelmien ymmärtäminen kuuluu konseptuaaliseen tietoon. Konseptuaalisen tiedon ideana on se, että ratkaistaessa jokin ongelma, tuotetaan usein jokin uusi käsite. Proseduraalinen tieto vastaa puolestaan kysymykseen "miten" ja siihen liittyy toiminnallisuutta. Proseduraalinen tieto ohjaa kohti ennalta asetettua tavoitetta. Matematiikassa erilaisten laskualgoritmien, kuten esimerkiksi allekkain vähennyslaskun, suorittaminen käyttäen apuna tiettyjä esitystapoja kuuluu proseduraaliseen tietoon. Jotta voidaan suorittaa erilaisia proseduraaliseen tietoon kuuluvia laskumenetelmiä, on ymmärrettävä eri esitysmuotoja ja näiden pohjana olevaa rakennetta, mutta suoritus voi automatisoitua niin, että enää ei välttämättä tietoisesti ajattele eri rakenteiden ominaisuuksia laskettaessa. (Haapasalo, 2004)

Ikäheimo (2002) on omassa tutkimuksessaan törmännyt näiden kahden tiedon välisen dilemman. Hänen mukaansa suuri osa oppilaista ei todellisuudessa oppinut matemaattista ajattelua, vaikka suoriutuivat koulukokeista hyvin. Sen sijaan he oppivat vaan ulkoa muistettavia mekaanisia laskutaitoja. (Ikäheimo, 2002) Tästä hyvä esimerkki on esimerkiksi juuri allekkain vähennyslasku. Oppilas saattaa osata laskea annetun tehtävän ihan oikein, koska on oppinut laskumekanismin, joka on saattanut jopa automatisoitua, mutta ei välttämättä ymmärrä mistä vaikka lainaamisessa on kyse.

Siitä kumpaan näistä tiedoista kannattaa panostaa ensin, ei ole tarkkaa vastausta. Tätä pulmaa Haapasalo kuvaa “purjehdusparadoksilla”: “mikäli purjehduskilpailussa maailman ympäri lähtösatama voidaan valita vapaasti, olisi järjetöntä sanoa muutaman päivän purjehtimisen jälkeen, kuka johtaa kisaa, puhumattakaan että julistaisimme voittajan” (Haapasalo, 2004, s.54). Mitä enemmän purjehtija tietää purjehtimisesta ja siihen vaikuttavista olosuhteista, sitä paremmin hän voi valita otollisen lähtösataman (Haapasalo, 2004). Haapasalo toteaa myös että, “voi olla viisaampaa valita aluksi vastainen tuuli (investoida konseptuaaliseen tietoon) ja körötellä myöhemmin viikkojen ajan myötäisessä, sen sijaan että valitsisi houkuttelevimman vaihtoehdon ja aloittaisi myötätuulessa (ryntäisi spontaaniin proseduraaliseen tietoon) luottaen siihen, että kaikki tulee sujumaan hyvin myöhemminkin” (Haapasalo, 2004, s.54).

Proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon välisestä yhteydestä on useita eri näkemyksiä, mutta enemmistö tutkijoista on sitä mieltä, että saavuttaakseen proseduraalista tietoa, tarvitaan joka tapauksessa jonkinlaista konseptuaalista tietoa. Siitä huolimatta, että proseduraalinen tieto näyttäisi muodostuvan nopeammin kuin konseptuaalinen tieto. Paikkajärjestelmän tapauksessa olisi panostettava konseptuaaliseen tietoon jo esiopetuksesta lähtien, jotta sen toimintaperiaatteet ymmärretään kunnolla. (Haapasalo, 2004)

Jos lähestytään oppimista konstruktivistisen oppimisteorian mukaan, on proseduraalinen tieto ainoa sopiva lähestymistapa (Haapasalo, 2004). Konstruktivistisen lähestymistavan mukaan oppiminen ei ole vain mieleen painamista, vaan tiedon konstruointia. Oppilas yhdistää uusia opiskeltavia käsitteitä, rakenteita ja operaatioita hänen aikaisempaan tietovarastoon, jotta hän pystyy ongelmatilanteissa käyttämään niitä. On useita eri tapoja toteuttaa matematiikan opettaminen konstruktivistisesti. Kuitenkin jokainen tapa vaatii aiempien rakenteiden tunnistamista, sillä oppilaan jo hallitsema tieto ja opitut lähestymistavat vaikuttavat uuden tiedon oppimiseen. Aikaisemman tiedon merkitys korostuu. Oppilaalle on tarjottava mahdollisuus konstruoida tietoaan, koska sen avulla oppilas vakuuttuu tiedon oikeellisuudesta omien havaintojen ja kokemusten kautta. (Leino, 2004) Lisäksi konstruktivistisen lähestymistavan avulla saavutetaan hyvä pohja oppimisvaikeuksien auttamiselle (Ikäheimo, 2002).

Matematiikan opetus koostuu siis yleisistä vakiintuneista toimintatavoista erilaisten matemaattisten käsitteiden ja tietojärjestelmien opettamisesta sekä niiden yhdistämisestä oppilaiden omiin tulkintoihin ja käsityksiin tarjoten oppilaille mahdollisuus konstruoida tietoa (Leino, 2004). Koska jokainen oppilas konstruoi uutta tietoa omiin aikaisempiin kokemuksiin, näkökulmiin ja tietoihin, voi sama opettajan käyttämä opetustapa tarjota eri oppilaille erilaisia kokemuksia. Näin ollen oppilaat oppivat eri tavalla, vaikka opetus olisi samaa. On myös huomioitavaa, että opiskelu ja oppiminen eivät tarkoita samaa asiaa. Matematiikan tunneilla istuminen ja siellä opettajan antamien tehtävien tekeminen ei välttämättä johda oppimiseen. Jotta matematiikkaa voi oppia, täytyy oppilaan toiminnan olla intentionaalista, eli oppilaan toiminnan täytyy olla hänelle itselleen merkitsevää ja hänen täytyy tietoisesti tavoitella oppimista. Matematiikan oppiminen täytyy olla kaiken siihen johtavan työn tavoitteena. (Yrjönsuuri & Yrjönsuuri, 2004)

Oppimista ei voi intentoida, vaan oppilaan täytyy pitää matematiikkaa itsensä kannalta merkityksellisenä ja mielekkäänä opiskellakseen sitä. Muodostaessaan itselleen matematiikan sisällön oppimista koskevan intention, oppilas saattaa huomata opiskeltavan sisällön olevan itselleen merkityksellistä ja tätä kautta hänelle voi syntyä halu oppia matematiikkaa. Matematiikan oppimista joko tapahtuu tai sitten ei, se on kontingenttia, eikä läpi elämän jatkuva prosessi. On kuitenkin kaksi tekijää, jotka saavat aikaan matematiikan oppimisen: matemaattiset kokemukset, jotka edustavat ulkoista toimintaa, sekä niiden reflektoiminen, joka taas on sisäistä toimintaa. Reflektoidessaan oppilas konstruoi opiskeltavaa asiaa aikaisempiin kokemuksiinsa pyrkien luomaan abstraktin käsityksen opiskeltavasta asiasta. Oppilas rupeaa intentionaalisesti reflektoimaan ja hankkimaan kokemuksia. (Yrjönsuuri & Yrjönsuuri, 2004)

Yrjönsuuren (2004) mukaan reflektoiva ajattelu, eli pohdiskeleminen, on välttämätöntä jopa alakoulun oppilaille opiskeltaessa monia matematiikan käsitteitä. Kun reflektoivaan ajatteluun yhdistetään algoritminen ajattelu, saavutetaan syvän oppimisen taso. Algoritminen ajattelu kuvaa taitotietoa, siihen kuuluu esimerkiksi kymmenjärjestelmä ja eri laskutoimitukset. Algoritminen ajattelu mukautuu sen mukaan, mihin matematiikan sisältöön oppilas juuri sillä hetkellä keskittyy. Matematiikan käsitteiden muuttuessa abstraktimmiksi opiskelun edetessä, myös algoritminen ajattelu mukautuu sen mukaan. On hyvä huomioida ajattelun tason olevan vaihtelevaa. Erilaiset ulkoiset ja sisäiset tekijät muokkaavat ajattelun tasoa. (Yrjönsuuri, 2004)

Matematiikan oppimiseen kuuluu olennaisesti erilaisten käsitteiden ja niiden eri ominaisuuksien oppiminen. Käsitteet ovat abstrakteja ja usein vaikeasti ymmärrettäviä (Yrjönsuuri, 2004). Tämän vuoksi käsitteen muodostukseen on varattava huomattavan paljon aikaan, eikä alussa saa olla kiire, jotta käsitteet opitaan alusta alkaen täysin oikein (Ikäheimo, 2002). Oppilailla saattaa olla jonkinlainen käsitys opiskeltavasta käsitteestä, mutta käsite ja käsitys ovat eri asioita. Käsitteellä on perinteisesti nimi ja sitä kuvaa esimerkiksi esineiden, tapahtumien tai asioiden luokka. Kun oppilaan oma käsitys jostain käsitteestä yhdistetään käsitteen tarkkaan määritelmään, oppilas oppii kyseisen käsitteen. (Yrjönsuuri, 2004)

Matemaattiset käsitteet alkavat muodostua jo varhaislapsuudessa, mutta käsitteen muodostukseen vaikuttaa useat eri asiat. Siihen vaikuttaa muun muassa oppijan omat kokemukset, se millaista sisältöä matematiikasta opiskellaan, sosiaalisen yleisön arvostukset sekä erilaiset apuvälineet ja konkreettiset mallit. (Leino, 2004; Yrjönsuuri, 2004) Myös kielellä on suuri vaikutus käsitteen muodostuksessa ja on tärkeää havainnollistaa opiskeltava asia mahdollisimman monipuolisesti, erityisesti nuorempien oppilaiden tapauksessa. Kun uudesta opetettavasta asiasta tarjotaan konkreettinen malli, jolla opiskellaan, abstraktioiden sijaan, matematiikan oppimisesta tulee helppoa ja mieluisaa. Parhaassa tapauksessa malli ja käsite suurimmaksi osaksi samaistuvat. Konkreettisia malleja käytettäessä on otettava huomioon oppilaan ajattelun taso ja malli on valittava huolellisesti. Mallin tulee olla sellainen, että sen ominaisuudet sopivat yhteen opittavan käsitteen ominaisuuksien kanssa ja mallin tulee olla helposti esitettävissä oppilaille. Oppilaiden on helpompi ottaa konkreettinen malli vastaan, kun sen voi yhdistää joihinkin käytännön tapahtumiin ja kun se on peräisin heidän lähiympäristöstä. Mallin on myös oltava houkutteleva, jotta oppilaat ryhtyvät tarkastelemaan sitä. Oikeastaan konstruktivistisen lähestymistavan mukaan olisi hyvä, jos oppilaille ei anneta valmiita malleja, vaan he oman ajattelun kautta joutuisivat itse muodostamaan niitä. (Yrjönsuuri, 2004)

Koska oppiminen lähtee oppijan omasta halusta oppia uusi asia, myös minäkäsityksellä on keskeinen rooli uuden asian oppimisessa. Itse asiassa minäkäsitys on yksi keskeisimpiä affektiivisia tekijöitä, jotka matematiikan oppimiseen ja matemaattisiin saavutuksiin vaikuttaa. Linnanmäen mukaan “minäkäsitys muodostuu yksilön ja hänen ympäristönsä välisessä vuorovaikutuksessa” (Linnanmäki, 2004, s. 243). Myönteisellä minäkäsityksellä on yhteys hyviin koulusaavutuksiin, kun taas kielteinen minäkäsitys korreloi alhaisen opiskelumotivaation kanssa ja johtaa kielteisiin asenteisiin koulua kohtaan. Minäkäsitys heikkenee iän myötä ja oppilailla, joilla on oppimisvaikeuksia, on heikompi minäkäsitys. Opiskelun alkuvaiheessa oppilailla on yleensä melko myönteinen minäkäsitys, joka kehittyy positiivisesti, jos oppilas tuntee suoriutuvan hyvin matematiikasta ensimmäisten kouluvuosien aikana. Matematiikka on yleisesti ottaen arvostettu oppiaine ja se saattaa synnyttää suuria tunteita. Kun tämä yhdistetään matematiikkasuorituksien vaikutukseen minäkäsitykseen, on opettajien pyrittävä määrätietoisesti kehittämään oppilaiden minäkäsitystä positiiviseen suuntaan. (Linnanmäki, 2004)

3. Tutkimus

3.1. Tutkimusmenetelmä ja tutkimuskysymykset

Tämän tutkimuksen tavoitteena on kehittää uudentyyppinen toimintamateriaali kymmenjärjestelmän oppimisen tueksi sekä kokeilla materiaalin käyttöä konkreettisesti eri ikäisten oppilaiden kanssa. Tutkimuksessa pyritään tutkimaan myös sitä, onko kehitetystä kymmenjärjestelmäruudukosta apua matematiikan laskuissa, sekä kokonaislukujen että desimaalilukujen tapauksessa, ja auttaako kymmenjärjestelmäruudukko ymmärtämään desimaalilukujen paikka-arvoa.

Tutkimusmenetelmänä on empiirinen kehittämistutkimus, jota kutsutaan myös design tutkimukseksi (eng. design-based research, DBR) (Pernaa, 2013). Kehittämistutkimus on suhteellisen uusi menetelmä, jossa on mahdollista yhdistää erilaisia tutkimusmenetelmiä (Hyvönen, 2012). Tässä tutkimuksessa käytetään vain kvantitatiivista eli määrällistä tutkimusta kehittämistutkimuksen rinnalla. Kehittämistutkimus on siinä mielessä hankala tutkimusmenetelmä, että sitä ei voida yksiselitteisesti määritellä (Pernaa, 2013). Kehittämistutkimus on hyvin samantyyppinen kuin toimintatutkimus, sillä molemmissa pyritään kehittämään opetusta teoriaan pohjautuen, arvioiden ja kehittäen sitä toistuvasti kohti parempaa lopputulosta. Menetelmien erona on muun muassa se, että toimintatutkimuksessa pyritään kehittämään paikallisesti toimivia ratkaisuja, kun taas kehittämistutkimuksessa pyritään yleistämään pienessäkin mittakaavassa kehitettyjä tempauksia. (Aksela & Pernaa, 2013; Pernaa, 2013)

Koska kehittämistutkimuksella ei ole yksiselitteistä määritelmää, eri tutkijat määrittelevät sen eri tavalla. Kehittämistutkimus nähdään tutkimusmenetelmänä, jossa yhdistyy kehittäminen ja tutkiminen sekä kvantitatiivinen ja kvalitatiivinen tutkimusmenetelmä. Kehittämistutkimus nähdään koostuvan useista erilaisista lähestymistavoista tai se voidaan nähdä metodologiana. Koska tarkkaa määritelmää ei ole, voi eri tutkijoiden näkemysten välille syntyä ristiriitoja. Tästä esimerkkinä on juuri kehittämistutkimuksen näkeminen metodologiana. Hyvösen (2012) mukaan se voi olla metodologia, kun taas Pönkän (2008) mielestä kehittämistutkimus ei ole metodologia. (Hyvönen, 2012; Pernaa, 2013; Pönkä, 2008)

Vaikka tutkijoilla on erilaisia näkemyksiä kehittämistutkimuksen määrittelemiseksi, lähes kaikissa näkökulmissa yhdistyy kolme asiaa: kehittämistutkimus on teoriasidonnaista, kehittämisestä syntyy jokin konkreettinen tuotos ja kehittäminen tapahtuu syklisessä prosessissa, joka nähdään tämän menetelmän vahvuutena. Jonkin kehitetyn tuotoksen lisäksi kehittämistutkimus pyrkii kehittämään myös teoriaa. Vaikka kehittämistutkimus pohjautuu teoriaan, kehittämistarve muodostuu todellisissa oppimistilanteissa ja tutkimuksen lähtökohtana on jokin aito ongelma. (Aksela & Pernaa, 2013; Hyvönen, 2012; Pernaa, 2013; Pönkä, 2008)

Näin ollen kehittämistutkimuksen ensimmäinen, samalla pakollinen, vaihe on aina ongelma-analyysi. Siinä pyritään löytämään, jokin ongelmakohta oppimisessa ja sitten lähteä kehittämään havaittua ongelmaa tukeutuen teoriaan. Teorian merkitys korostuu, koska tutkimuksen lopuksi on pystyttävä peilaamaan tutkimustulokset aikaisempaan tutkimustietoon. Pro gradu-tutkimuksissa ongelma-analyysi tapahtuu useimmiten kirjallisuusanalyysinä kartoittaen mitä aiheesta on aiemmin jo tutkittu. Ongelma-analyysin jälkeen, kehittämistutkimus koostuu iteratiivisista sykleistä, jotka voidaan toteuttaa pienessä tai suuressa mittakaavassa. (Aksela & Pernaa, 2013; Hyvönen, 2012; Pernaa, 2013) Tämä tutkimus on toteutettu pienemmässä mittakaavassa, sillä siinä on vain kolme pienempää sykliä.

Kehittämissyklin ensimmäinen vaihe on kehittämissuunnitelman laatiminen. Kehittämistutkimus on siinä mielessä joustava tutkimusmenetelmä, että tutkimuksen edetessä kehittämissuunnitelmaa voidaan jatkuvasti päivittää. Kun suunnitelma on tehty, lähdetään kehittämään pedagogista tuotosta, käytäntöä tai ympäristöä, riippuen siitä mitä tutkija on valinnut. Tämän jälkeen kehitettyä tuotosta testataan jollakin joukolla ja lopuksi analysoidaan saadut tulokset, jonka jälkeen lähdetään uudelleen suunnittelemaan ja kohti uutta sykliä. Syklejä toteutetaan niin kauan, kun ollaan tyytyväisiä lopputulokseen tai ajallisesti on pakko lopettaa johonkin vaiheeseen. (Hyvönen, 2012; Pernaa, 2013)

Koska tämän tutkimuksen tutkimusmenetelmänä on kehittämistutkimus, tutkimuksen pääpointti on sellaisen toimintamateriaalin kehittäminen, joka auttaa paikkajärjestelmän tai tarkemmin kymmenjärjestelmän oppimisessa ja kymmenjärjestelmässä laskemisessa, niin kokonaislukujen kuin desimaalilukujenkin tapauksessa. Kehitettyä materiaalia testataan kolmeen kertaan: ensin matematiikan yliopisto-opiskelijoiden kanssa viisijärjestelmän avulla, sitten viidesluokkalaisten kanssa kymmenjärjestelmässä kokonaislukujen tapauksessa ja lopuksi seitsemäsluokkalaisten kanssa desimaalilukujen kanssa. Materiaalia, sen käyttöä opetuksessa ja siihen liittyviä tehtäviä paranneltiin jokaisen kokeilukerran jälkeen kohti parasta mahdollista lopputulosta.

Tutkimuskysymyksiä on kaksi:

1. Tukeeko kymmenjärjestelmäruudukon käyttö yhteen-, vähennys- ja kertolaskun oppimista?
2. Tukeeko kymmenjärjestelmäruudukon käyttö desimaalilukujen paikka-arvon ymmärtämistä ja desimaaliluvuilla laskemista?

Ensimmäiseen kysymykseen on tavoitteena saada vastaus viidesluokkalaisten tutkimustuloksista ja toiseen seitsemäsluokkalaisten vastauksista. Kysymykset ovat hyvin yleistetyssä muodossa, mutta täytyy ottaa huomioon, että toimintamateriaalin testaaminen tapahtuu hyvin lyhyellä ajalla ja pienellä otoksella. Tämän vuoksi vastauksia voi olla hankalaa yleistää, mutta pyritään vastaamaan kysymyksiin tähän tutkimukseen osallistuvien osalta.

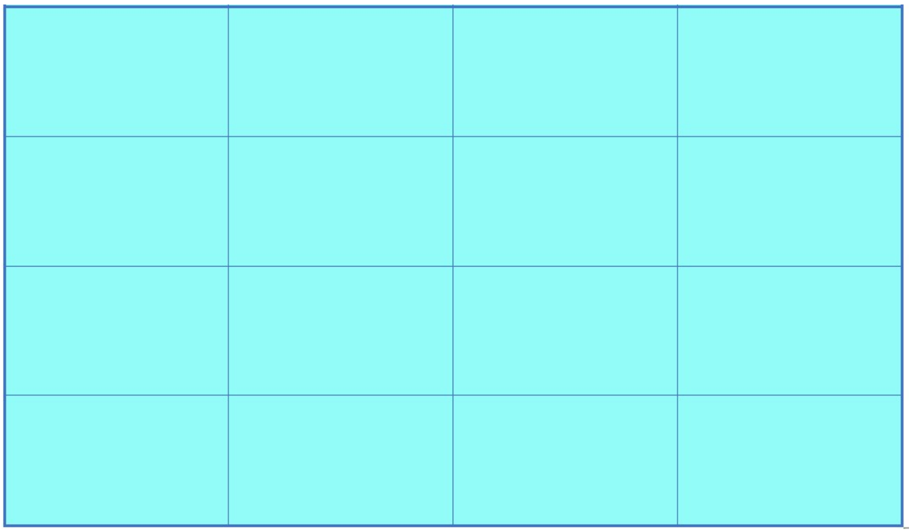
3.2. Tutkimuksen toteutus

Tutkimuksen tavoitteena on kehittää toiminnallinen materiaali kymmenjärjestelmän oppimisen tueksi sekä testata kehitettyä tuotosta jollain oppilasryhmällä. Ensimmäisenä idea tämän tyyliseen toimintamateriaaliin syntyi yhdellä yliopiston kurssilla, jolla professori Juha Oikkonen esitteli tästä kehitetystä ruudukosta hyvin yksinkertaistettua versiota. Hän kannusti opiskelijoita tarttumaan ideaan ja lähteä kehittämään sitä. Siitä lähti tämä tutkimus etenemään. Aluksi oli kuitenkin löydettävä perusteluja, että tällainen toimintamateriaali olisi tarpeellinen, ja ideoita miten lähteä kehittämään toimintamateriaalia eteenpäin. Aluksi paikkajärjestelmäruudukosta (tai kymmenjärjestelmäruudukosta) kehitettiin alustava versio, eri lähteiden perusteella. Tämän jälkeen tutkija kävi keskustelemassa kasvatustieteen osastolla matematiikan didaktiikan yliopistolehtorin Anu Laineen kanssa siitä, miten kehitettyä materiaalia voisi kehittää edelleen ja tutustumassa jo olemassa oleviin kymmenjärjestelmävälineisiin. Keskustelun pohjalta toimintamateriaalia kehitettiin taas eteenpäin, jotta se sopisi paremmin oppilaiden käyttöön. Myös kymmenjärjestelmäruudukon käyttöohjeita, eli miten ruudukon avulla lasketaan, muokattiin ja paranneltiin käydyn keskustelun pohjalta. Tämän jälkeen, kaiken jo selvitetyn tiedon nojalla, kehitettiin toiminnallisesta materiaalista sellainen toimiva versio, että sitä voitiin lähteä testaamaan.

Kehitettyä tuotosta oli tarkoitus testata kahden opetuskokeilun avulla, jossa harjoitellaan kymmenjärjestelmäruudukon käyttöä käytännössä ja sitten testataan sitä alku- ja loppukyselyillä. Koska kyseessä on kehittämistutkimus, ruudukon käyttöä kokeiltiin yliopisto-opiskelijoiden kanssa ennen varsinaisia opetuskokeiluja. Tämän kokeilun tarkoituksena oli lähinnä saada palautetta muilta kehitetystä ruudukosta sekä siitä ovatko välineet, jotka tähän valittiin, sopivia. Ennen tätä kokeilua, paikkajärjestelmäruudukosta oli tehty kaksi erilaista vaihtoehtoa (kuva 4 ja kuva 5). Näiden eri versioiden erot ovat siinä, että laitetaanko yksiköt ylös näkyville vai ei.

Tuhannet	Sadat	Kymmenet	Ykköset

Kuva 4: Paikkajärjestelmäruudukon versio 1, kymmenjärjestelmän tapauksessa (eli kymmenjärjestelmäruudukko)



Kuva 5: Paikkajärjestelmäruudukon versio 2

Ensimmäinen kokeilu tapahtui Helsingin yliopistossa, matematiikan ja tilastotieteen osastolla yhteisessä kandi- ja graduseminaarissa. Koska kymmenjärjestelmä on jo hyvin tuttu, kokeiltiin paikkajärjestelmäruudukkoa viisijärjestelmän avulla, jotta mahdollisesti tulisi ilmi samoja vaikeuksia, joita oppilailla saattaa tulla kymmenjärjestelmän kanssa. Kokeilussa käytettiin tuota versiota kaksi (kuva 5) taulukosta, joka oli tulostettu kaikille valmiiksi sekä hamahelmiä, jotka edustivat numeroita. Myös sääntölaput olivat tulostettuna valmiiksi, juuri siinä viisijärjestelmässä. Tämä kokeilukerta eteni niin, että opiskelijoita pyydettiin ensin itsenäisesti laskemaan päässälaskuna viisijärjestelmässä yhteen-, vähennys- ja kertolaskuja, jonka jälkeen käytiin läpi, miten samat laskut laskettaisiin ruudukon avulla. Sen jälkeen opiskelijat saivat itse harjoitella sen käyttöä ja lopuksi kerättiin palautetta, jonka avulla ideaa kehitettiin. Kokeilun aikana kävi ilmi, että hamahelmet olivat huono vaihtoehto, koska ne olivat liian pieniä ja saattoivat lähteä pyörimään pois pöydältä. Lisäksi kävi ilmi, että rivejä tarvittaisiin ainakin yksi lisää, jotta varmasti mahtuu laskemaan kaikkia laskuja sekä olisi hyvä, jos yksiköt olisivat näkyvissä. Näiden avulla ruudukkoa paranneltiin, josta syntyi kolmas eri versio (kuva 6), jota käytettiin sitten opetuskokeilussa. Opiskelijoista saadun palautteen mukaan ruudukosta oli apua vain vaikeimpien viisijärjestelmälaskujen tapauksessa, muut menivät tutulla rutiinilla, mikä oli odotettavissa yliopisto-opiskelijoiden tapauksessa.

Tuhannet	Sadat	Kymmenet	Ykköset

Kuva 6: Paikkajärjestelmäruudukon versio 3, kymmenjärjestelmän tapauksessa (eli kymmenjärjestelmäruudukko)

Ensimmäinen varsinainen opetuskokeilu tapahtui vantaalaisessa peruskoulussa, johon osallistui kaksi viidennen luokan ryhmää. Opetuskokeilu toteutettiin ihan samalla tavalla molempien ryhmien kanssa. Yhteensä opetuskokeiluun osallistui noin 40 oppilasta, joista tutkimusluvan sain 27 oppilaalta. Näihin oppilaisiin siis keskitytään tässä tutkimuksessa. Tässä ensimmäisessä opetuskokeilussa keskityttiin kokonaislukujen yhteen-, vähennys- ja kertolaskuun. Tutkimus toteutettiin niin, että oppilaat tekivät etukäteen omien opettajien johdolla alkukyselyt ja siitä parin viikon päästä tutkija kävi itse pitämässä heille opetusta vajaan kahden tunnin ajan, jonka lopuksi tehtiin loppukyselyt. Välineinä käytettiin paperista kymmenjärjestelmäruudukkoa (kuva 6), kymmenjärjestelmän sääntölappuja (kuva 9) sekä makaroneja, jotka edustivat numeroita. Näiden lisäksi käytössä oli tyhjää ruutupaperia, jota käytetään ruudukon apuna laskiessa.

Opetuskokeilu aloitettiin opettajajohtoisesti, mutta samalla kysellen. Aluksi käytiin ihan yleisesti läpi, kuinka monta ykköstä, kymmentä jne. jossakin nelinumeroisessa luvussa on. Tämän jälkeen esittelin heille kymmenjärjestelmäruudukkoa ja sääntölappua, sekä niiden käyttöä. Kävimme yhteisesti läpi miten luvut laitetaan ruudukkoon, sekä miten ruudukon avulla saadaan laskettua yhteen-, vähennys- ja kertolaskuja. Kertolaskujen tapauksessa käytiin kaksi eri vaihtoehtoa, riippuen siitä kerrotaanko luku yksi- vai kaksinumeroisella luvulla. Seuraavaksi oppilaat saivat sitten harjoitella itsenäisesti kymmenjärjestelmäruudukon käyttöä annettujen tehtävien (liite 3) avulla. Kun tehtävät saatiin tehtyä tai aikataulullisesti oli laskettu tarpeeksi, askarreltiin hexahexaflexagonit pieneksi välikevennykseksi ennen loppukyselyä, jotta ajatukset saa hetkeksi muualle. Lopuksi tehtiin loppukyselyt, jossa oli tehtäviä sekä mielipidekysymyksiä. Alku- ja loppukyselyjen lisäksi, oppilailta kerättiin palautetta koko tunnin ajan, kysellen heidän mielipiteitänsä samalla kun he laskivat tehtäviä.

T	S	K	Y		KO	SO	TO

Kuva 7: Paikkajärjestelmäruudukon versio 4, kymmenjärjestelmän tapauksessa (eli kymmenjärjestelmäruudukko)

Ensimmäisen opetuskokeilun jälkeen ei enää tehty muutoksia itse siihen ruudukkoon (kokonaislukuversio), mutta asiat opetettiin toisella kerralla vähän eri tavalla, saadun palautteen mukaan. Lisäksi loppukyselyä muokattiin lisäämällä mielipideosioon kysymyksen siitä, oliko kymmenjärjestelmäruudukosta apua oppilaiden mielestä. Tämä muutos tehtiin toivoen, että saadaan paremmin vastauksia tutkimuskysymyksiin. Toisella opetuskokeilukerralla käytettiin muuten samoja välineitä kuin ensimmäisellä kerralla, ainoastaan kymmenjärjestelmäruudukosta käytettiin kuvan seitsemän mukaista versiota, koska tällä toisella kerralla tutkittiin desimaalilukuja. Tutkija olisi myös tähän ruudukon neljänteen versioon (kuva 7) halunnut viisi riviä laskutilaa niin kuin kolmannessa versiossa (kuva 6), mutta ei saanut niin tulostettua ruudukkoa tarpeeksi suureksi oppilaiden käyttöön.

Toinen opetuskokeilu tapahtui helsinkiläisessä peruskoulussa kolmen eri seitsemäsluokkalaisten ryhmän kanssa. Yhteensä kokeiluun osallistui noin 50 oppilasta, mutta tutkimuksessa on mukana vain 12 oppilasta, koska muilta puuttuu tutkimusluvat. Näiden oppilaiden kanssa keskityttiin desimaalilukujen ominaisuuksien hallitsemiseen sekä desimaalilukujen yhteen- ja vähennyslaskuun. Opetuskokeiluun osallistuvista ryhmistä kaksi olivat tehneet alkukyselyt, jossa on tehtäviä sekä mielipidekysymyksiä, etukäteen, koska heidän kanssa oli käytössä vain 45 minuuttia. Kolmannen ryhmän kanssa oli käytössä kaksi 45 minuutin tuntia, joten heidän kanssaan tehtiin ihan tunnin aluksi alkukyselyt ja sitten jatkettiin tuntia ihan samalla tavalla kuin kahden muun ryhmän kanssa. Tutkimustuloksissa ei ollut eroja näiden ryhmien välillä, vaikka tekivät alku- ja loppukyselyt eri aikaan. Kokeilu eteni niin, että ensiksi esiteltiin kymmenjärjestelmäruudukkoa, sekä sen käyttöä sellaisen luvun kanssa, jossa on kolme desimaalia, jonka jälkeen käytiin läpi yhteen- ja vähennyslasku ruudukon avulla. Sitten oppilaat saivat tehdä annettuja tehtäviä (liite 6) ruudukon avulla ja tunnin lopuksi tehtiin loppukyselyt. Samalla tavalla kuin ensimmäisessä opetuskokeilussa, oppilailta kerättiin koko tunnin ajan palautetta kysellen mielipiteitä samalla kuin he laskivat.

Lopuksi kaikilta oppilailta saadun palautteen ja tutkimustulosten perusteella kehitettyä toimintamateriaalia paranneltiin taas. Kymmenjärjestelmäruudukkoon ei itsessään tehty enää muutoksia, koska molemmat eri taulukon versiot (liitteet 7 ja 8) osoittautuivat toimiviksi. Tutkimuksen perusteella voidaan suositella makaronin käyttöä edustamaan numeroita, sillä raaka makaroni oli tarpeeksi pientä niin, että ruutuihin mahtui niitä useampi, mutta ei kuitenkaan liian pientä, jota olisi hankalaa käsitellä. Ainoastaan nuorempia oppilaita piti muistuttaa, että raakaa makaronia ei saa syödä. Lisäksi kymmenjärjestelmäruudukon käyttöohjeita kehitettiin kaikkien kokeilujen jälkeen, koska kokeilukerroilla ilmeni, että jotkut oppilaat tarvitsevat tarkempaa ohjausta, jotta pystyvät käyttämään ruudukkoa apunaan laskiessa. Nykyisillä ohjeilla ja ohjeissa olevien esimerkkien avulla pitäisi pystyä kymmenjärjestelmäruudukkoa käyttämään ilman tutkijan apua.

3.3. Kymmenjärjestelmäruudukko ja sen soveltamismahdollisuudet

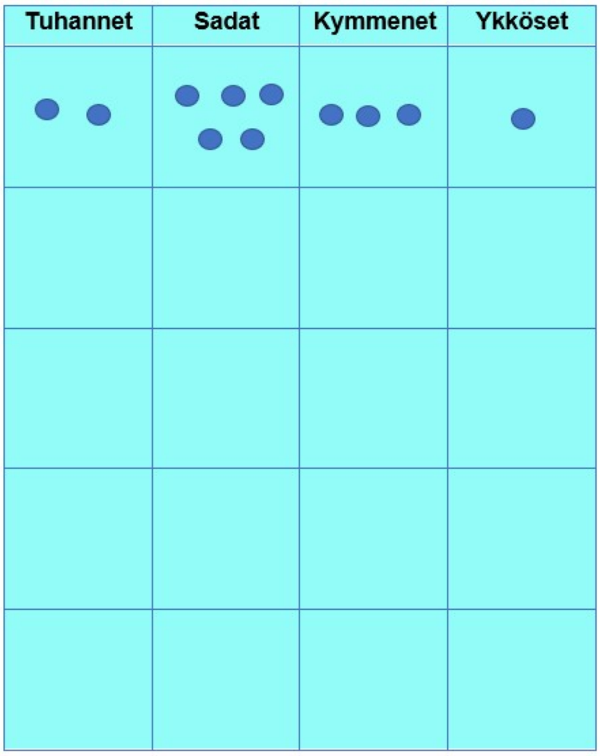
Kymmenjärjestelmän opiskelemisen tueksi on kehitetty useita erilaisia havainnollistamisvälineitä, joita käsiteltiin luvussa ”Toiminnallinen opettaminen ja erilaisia kymmenjärjestelmävälineitä”. Suurin osa näistä välineistä ovat kuitenkin maksullisia, joten niitä on kouluissa yleensä vain rajoitettu määrä, joita ei riitä jokaiselle oppilaalle. Lisäksi iso osa näistä välineistä erottaa eri yksiköt (eng. unit) toisistaan koon ja muodon perusteella, jolloin ymmärrys paikkajärjestelmästä voi jäädä pinnalliseksi. Tämän vuoksi tutkimuksessa haluttiin kehittää sellainen havainnollistamisväline, joka on lähes ilmainen väline ja joka on helppo tehdä itse yhdessä oppilaiden kanssa tai sitten kymmenjärjestelmäruudukon voi tulostaa suoraan liitteistä (liitteet 7 ja 8 riippuen halutaanko keskittyä kokonais- vai desimaalilukuihin). Kyseisen havainnollistamisvälineen ero yleisimpiin kymmenjärjestelmävälineisiin on se, että sama esine tms. kuvaa eri lukua, riippuen siitä mihin kohtaan kymmenjärjestelmäruudukkoa esine on sijoitettu sekä se, että tätä havainnollistamisvälinettä voi käyttää minkä tahansa lukujärjestelmän avulla. Isona etuna tässä havainnollistamisvälineessä on myös se, että oppilas ei välttämättä tarvitse muuta kuin kynän ja paperia, jotta pystyy käyttämään tätä apuna. Hän voi piirtää numeroa vastaavat esineet ruudukkoon. Oppilas voi käyttää kymmenjärjestelmäruudukkoa apunaan siis myös koetilanteissa, jos hän kokee siitä olevan apua.

Niin kuin yllä tuli ilmi, paikkajärjestelmäruudukon eräs huippuominaisuus on se, että sillä on useita erilaisia soveltamismahdollisuuksia. Ensimmäinen mahdollinen vaihtoehto on juuri se, että piirtää vain sääntökortin ja ruudukon paperille ja siihen ruudukkoon piirtää sitten esimerkiksi ympyröitä edustamaan numeroita. Toinen vaihtoehto on se, mitä tässä tutkimuksessa on käytetty. Eli käytetään ruudukosta ja sääntökortista tulostettua versiota sekä jotain pieniä esineitä, esimerkiksi tutkimuksessa käytettiin raakaa makaronia. Se toimi hyvin. Taivas on vain rajana siinä, mitä pieniä esineitä haluaa käyttää, mutta kannattaa käyttää jotain sellaista mikä ei pyöri pois pöydältä. Jos tilaa ei ole paljoa, hyvä esimerkkivaihtoehto on legot, sillä niitä voi koota päällekkäin säästämään tilaa. Monessa luokassa on yleensä laatoitettu lattia, eli siinä on valmiina eräs ruudukko. Voidaan siis käyttää luokan lattiaa ruudukkona ja jokaista oppilasta voi pyytää tuomaan kotoa jonkun pienen esineen, joita voidaan sitten käyttää edustamaan numeroita. Tässä on oiva mahdollisuus tuoda vaihtelua perinteisille matematiikan tunneille. Yleisesti ottaen, kun erityisesti kymmenjärjestelmän oppiminen perustuu suurimmaksi osaksi luokassa tapahtuvaan opiskeluun, niin tämän kymmenjärjestelmäruudukon avulla voidaan lähteä vaikka ulos opiskelemaan. Esimerkiksi ihan koulun pihalle tai lähimetsään voi piirtää ruudukon ja sitten välineinä käyttää maasta löytyviä kiviä tai käpyjä. Jos tilaa vain riittää (esim. iso hiekkakenttä), eräs hyvä esimerkki on myös piirtää tarpeeksi suuri ruudukko ja käyttää oppilaita välineinä. Näin oppilailla tulee liikuttua sekä samalla he joutuvat ihan huomaamattaan kommunikoimaan keskenään, kun lasketaan. Esimerkiksi “mene sinä Matti pois kymmenistä ja sitten kymmenen uutta oppilasta tulee ruudukon ulkopuolelta ykkösiin”. Vaihtoehtoja on siis useita erilaisia, joista lähes kaikki ovat ihan ilmaisia.

Käydään seuraavaksi läpi kymmenjärjestelmäruudukon käyttöohjeita. Seuraavissa käyttöohjeiden esimerkeissä on käytetty kymmenjärjestelmäruudukosta sitä kokonaislukuversiota (kuva 6, liite 7), jota käytettiin alakoulun puolella, mutta ihan samalla tavalla toimitaan myös desimaalilukujen kanssa. Tällöin vain sarakkeita on enemmän. Laskeminen tapahtuu myös samalla tavalla, oli tutkittavana mikä tahansa lukujärjestelmä kokonaislukujen tapauksessa, tällöin vain sääntökortista tehdään eri versio. Desimaalilukujen yhteen- ja vähennyslasku toimii myös samalla tavalla kuin kokonaislukujen tapauksessa. Kerto- ja jakolasku toimii hiukan eri tavalla, mutta ne eivät kuulu tähän tutkimukseen.

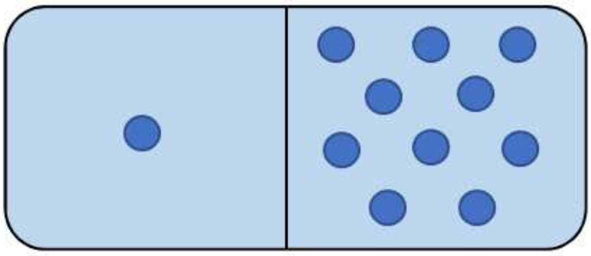
3.3.1. Kymmenjärjestelmäruudukon käyttöohjeet

Ennen kuin voidaan lähteä laskemaan, täytyy osata sijoittaa luvut oikein kymmenjärjestelmäruudukkoon. Luvut sijoitetaan ruudukkoon, niin että luvun jokainen numero vastaa tiettyä yksikköä ja tähän yksikköön sijoitetaan numeroa vastaava määrä esineitä. Jos tutkitaan esimerkiksi lukua 2531, niin ykkösten kohdalle sijoitetaan yksi esine, kymmenien kohdalle kolme esinettä, satasten kohdalle viisi esinettä ja tuhansien kohdalle kaksi esinettä (kuva 8).



Kuva 8: Luku 2531 kymmenjärjestelmäruudukossa

Sääntökorttia (kuva 9) tarvitaan esimerkiksi kun halutaan muuttaa kymmenet ykkösiksi. Sääntökorttia käytetään apuna myös laskettaessa, kun tarvitaan kymmenylitystä tai vähennyslaskun tapauksessa lainaamista. Kymmenjärjestelmän tapauksessa huomataan, että sääntökortin viivan vasemmalla puolella on yksi esine ja oikealla puolella 10 esinettä. Näin ollen, kun vasemmalta puolelta halutaan siirtää yksi esine viivan oikealle puolelle, poistetaan vasemmalta puolelta yksi ja lisätään oikealle puolelle kymmenen esinettä. Kun viivan oikealla puolella on yli yhdeksän esinettä, täytyy sieltä sääntökortin mukaan poistaa kymmenen esinettä ja siirtää yksi esine vasemmalle puolelle.



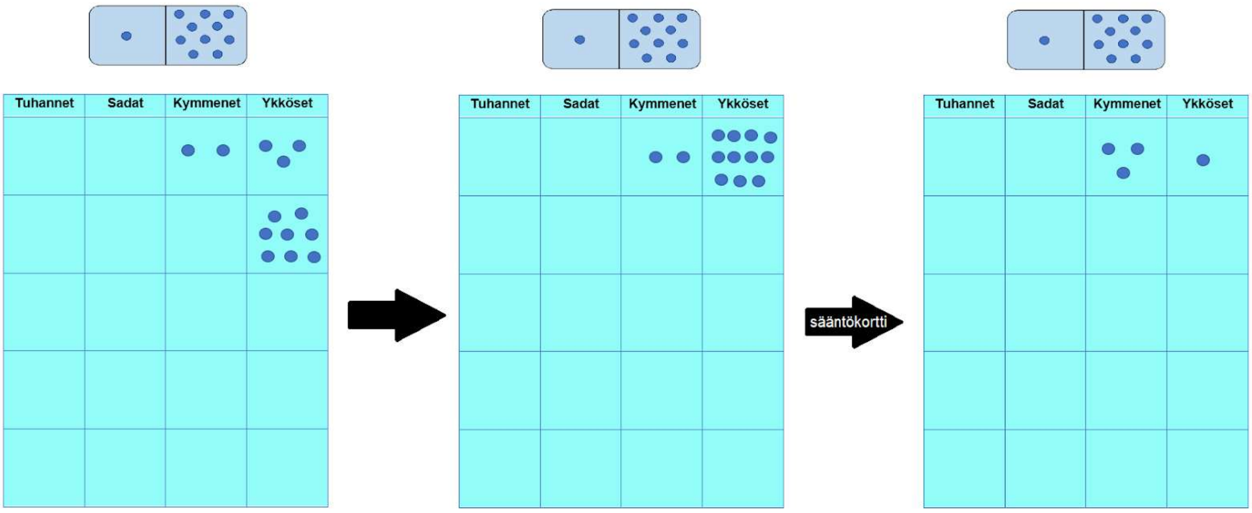
Kuva 9: Sääntökortti, kun kantalukuna on luku 10

Laskettaessa kymmenjärjestelmäruudukon avulla on tärkeää muistaa, että ruudukko ja jokin paperi, johon laskut kirjataan kulkevat rinnakkain. Tässä tutkimuksessa keskitytään kokonaislukujen yhteen-, vähennys- ja kertolaskuihin, joten käydään vain ne tässä läpi. Ruudukon avulla on kuitenkin mahdollista harjoitella myös jakolaskua, se on vain vähän monimutkaisempaa.

Desimaalilukujen yhteen- ja vähennyslasku toimivat ihan samalla tavalla kuin kokonaislukujen yhteen- ja vähennyslasku.

Yhteenlaskussa ruudukon ensimmäiselle riville sijoitetaan laskun ensimmäinen luku ja toiselle riville toinen luku pienien esineiden avulla. Kun molemmat luvut on sijoitettu ruudukkoon, yhdistetään samassa sarakkeessa olevien esineiden määrät yhteen, vaikka ensimmäiselle tai viimeiselle riville. Tämän jälkeen katsotaan sääntökortin avulla, tarvitaanko kymmenylitystä ja tehdään sitten tarvittavat muutokset.

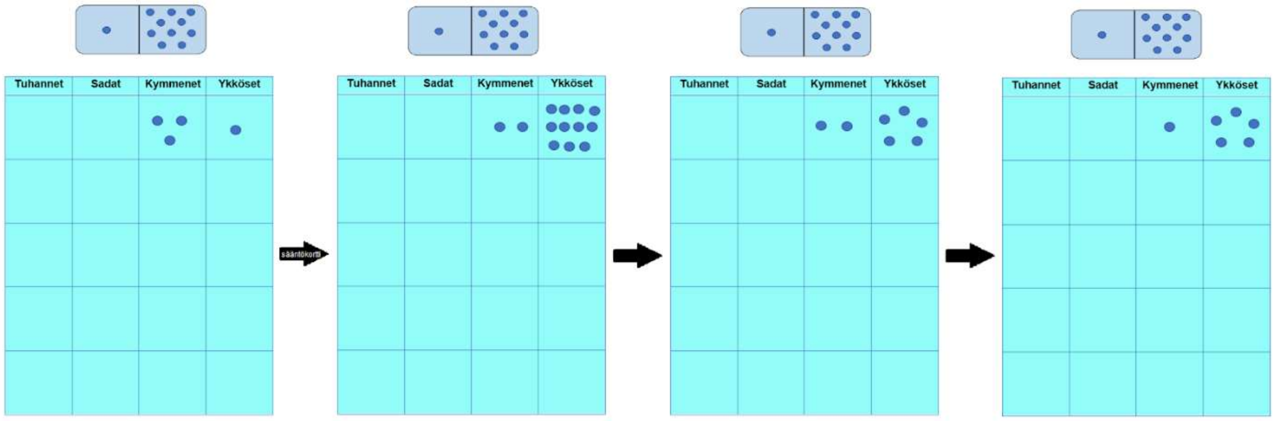
Esimerkiksi laskettaessa $23 + 8$, niin ensimmäiselle riville ykkösten kohdalle tulisi kolme esinettä ja kymmenien kohdalle kaksi esinettä. Toiselle riville tulisi ykkösten sarakkeeseen kahdeksan esinettä. Sitten laskettaisiin sarakkeittain yhteen, jolloin ykkösten sarakkeeseen tulisi 11 esinettä ja kymmenien kohdalle kaksi esinettä. Huomataan kuitenkin sääntökortin avulla, että ykkösten sarakkeessa on yli 9 esinettä, jolloin sieltä poistetaan 10 esinettä ja siirretään kymmenien sarakkeeseen yksi esine. Tällöin ykkösten sarakkeeseen jäisi yksi esine ja kymmenien sarakkeeseen tulisi kolme esinettä, joka vastaa juuri haluttua tulosta. Eli $23 + 8 = 31$. Alla olevassa kuvassa (kuva 10) on esitetty tämä lasku välivaiheittain. Kuvasta näkyy myös missä kohdassa on tarvittu sääntökorttia.



Kuva 10: Yhteenlaskuesimerkki $(23 + 8 = 31)$

Vähennyslaskussa ruudukon ensimmäiselle riville sijoitetaan luku, josta lähdetään vähentämään. Tämän jälkeen vähennettävästä luvusta aletaan vähentää vähentäjän osoittama määrä esineitä sarakkeittain. Jos esimerkiksi ykkösistä pitää vähentää kuusi, mutta siinä on vain kaksi esinettä, täytyy käyttää apuna lainaamista, niin kuin allekkain vähennyslaskussakin. Tämä tehdään sääntökortin avulla.

Esimerkiksi laskettaessa $31 - 16$, ensimmäiselle riville laitetaan ykkösten kohdalle yksi esine ja kymmenien kohdalle kolme esinettä. Tämän jälkeen ykkösistä pitäisi vähentää kuusi esinettä, mutta koska siinä on vain yksi esine, tarvitaan lainaamista. Käytetään taas apuna sääntökorttia ja huomataan, että kun kymmenien sarakkeesta otetaan yksi esine pois, siirretään ykkösiin kymmenen esinettä. Tämän jälkeen ykkösissä on 11 esinettä ja kymmenien sarakkeessa kaksi esinettä. Nyt voidaan ykkösistä vähentää kuusi esinettä, jolloin sinne jää viisi esinettä. Tämän jälkeen vähennetään kymmenien sarakkeesta vielä yksi esine koska vähentäjässä, eli luvussa 16, on yksi kymppi. Tällöin kymmenien sarakkeeseen jää enää yksi esine. Näin huomataan, että jäljelle jäi yksi esine kymmenien kohdalle ja viisi esinettä ykkösiin, siis $31 - 16 = 15$. Alla olevassa kuvassa (kuva 11) on esitetty tämä lasku välivaiheittain. Kuvasta näkyy myös missä kohdassa on tarvittu sääntökorttia.

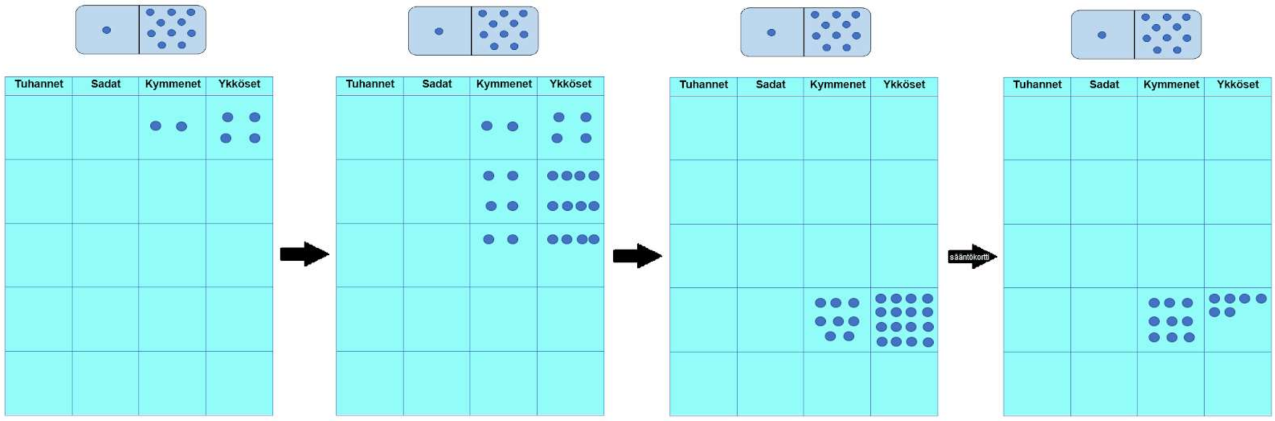


Kuva 11: Vähennyslaskuesimerkki $(31 - 16 = 15)$

Kertolaskun laskemiseen on kaksi eri tapaa, riippuen siitä kerrotaanko yksi- vai kaksinumeroisella luvulla. Yksinumeroisella luvulla kerrottaessa ruudukon ensimmäiselle riville sijoitetaan kerrottava luku. Tämän jälkeen kerrottava luku kerrotaan kertojalla niin, että riveille 2-5 laitetaan kerrottava yhden kerran vähemmän kuin mikä kertoja on, koska kerrottava luku on jo kerran laitettu ensimmäiselle riville. Sitten kerätään pienet esineet taas yhteen sarakkeittain. Lopuksi katsotaan sääntökortin avulla, tarvitaanko kymmenylitystä ja tehdään tarvittavat muutokset.

Esimerkiksi laskettaessa $4 \cdot 24$, ruudukon ensimmäiselle riville laitetaan kerrottava eli tässä tapauksessa ykkösten kohdalle tulisi neljä esinettä ja kymmenien kohdalle kaksi esinettä. Tämän jälkeen riveille 2-5 laitettaisiin ykkösten kohdalle kolme kertaa neljä esinettä allekkain ja kymmenien kohdalle kolme kertaa kaksi esinettä allekkain. Niin kuin kuvassa 12 näkyy, pieniä esineitä voidaan laittaa yhteen ruutuun useita allekkain. Sitten esineet kerättäisiin yhteen sarakkeittain jälleen, jolloin ykkösten sarakkeessa olisi 16 esinettä ja kymmenien sarakkeessa kahdeksan esinettä. Huomataan kuitenkin sääntökortin avulla, että ykkösten sarakkeessa on yli 9 esinettä, jolloin sieltä poistetaan 10 esinettä ja siirretään kymmenien sarakkeeseen yksi esine. Tällöin ykkösten sarakkeeseen jäisi kuusi esinettä ja kymmenien sarakkeessa olisi yhdeksän esinettä. Näin ollen $4 \cdot 24 =$

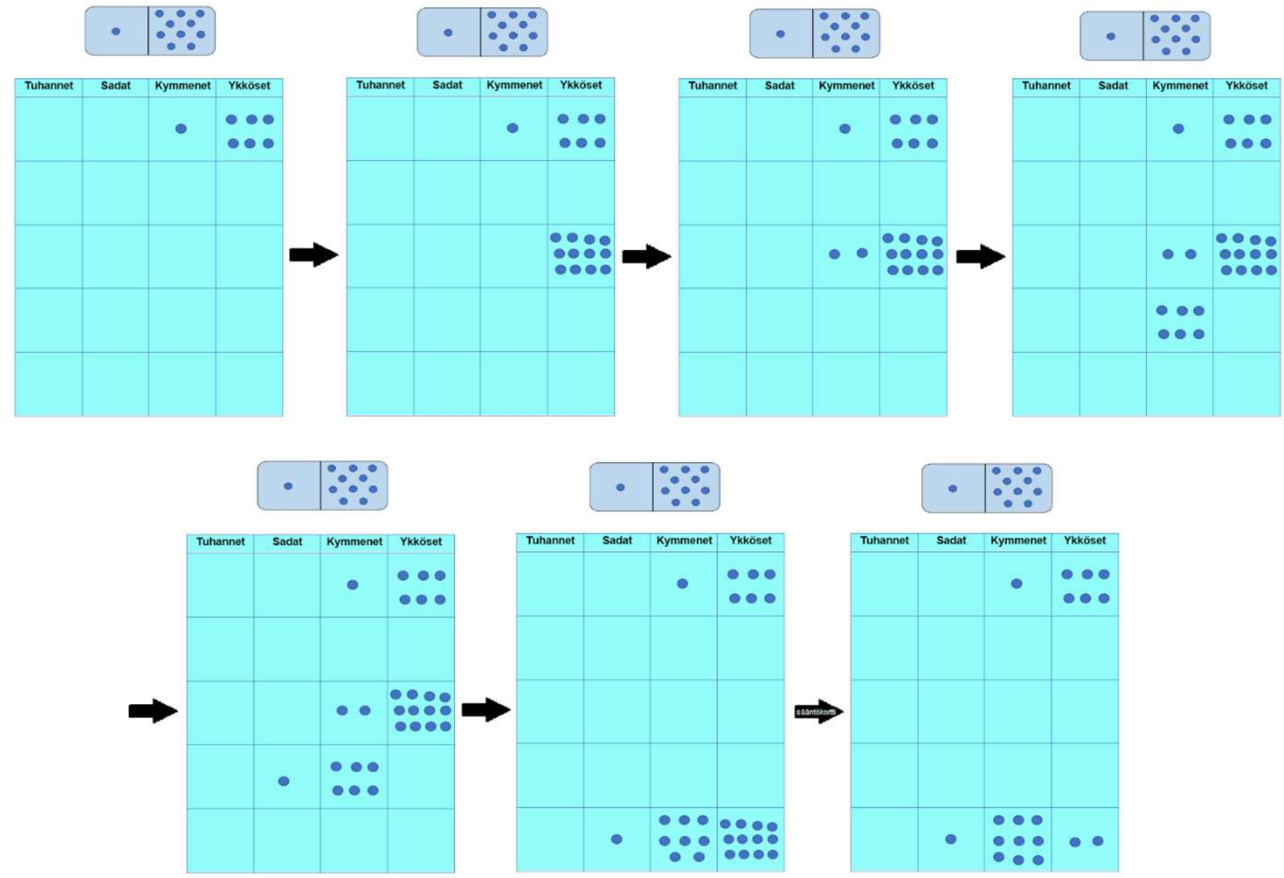
96. Alla olevassa kuvassa (kuva 12) on esitetty tämä lasku välivaiheittain. Kuvasta näkyy myös missä kohdassa on tarvittu sääntökorttia.



Kuva 12: Kertolaskuesimerkki, kun kertojana on yksinumeroinen luku $(4 \cdot 24 = 96)$

Kaksinumeroisella luvulla kertoessa ruudukon ensimmäiselle riville sijoitetaan kerrottava luku. Kaksinumeroisella kertojalla kertominen toimii samalla tavalla, kun allekkain kertolaskussa, kun kertojana on kaksinumeroinen luku, sillä erotuksella, että nyt muistinumeroita ei tarvita. Lopuksi sitten katsotaan taas sääntökortin avulla, tarvitaanko kymmenylitystä ja tehdään tarvittavat muutokset.

Esimerkiksi laskettaessa $12 \cdot 16$, ensimmäiselle riville laitetaan tunnetusti ykkösten kohdalle kuusi esinettä ja kymmenien kohdalle yksi esine. Sitten lähdetään kertomaan niin, että ensin kerrotaan luvulla 2 kerrottava luku. Tässä tapauksessa siis kerrotaan ensin $2 \cdot 6$, josta saadaan 12. Siis riville kolme ykkösten sarakkeeseen laitetaan 12 esinettä. Tämän jälkeen kerrotaan $2 \cdot 1$, josta saadaan kaksi. Nyt kaksi esinettä laitetaan riville kolme kymmenien sarakkeeseen, koska tässä kerrottiin ykköset kymmenellä. Sitten siirrytään kertomaan kertojan kymmenellä. Voidaan kuitenkin ajatella kerrottavan vain ykkösellä, kunhan muistetaan sijoittaa esineet oikealle paikalle. Kerrotaan seuraavaksi siis $1 \cdot 6$, josta saadaan vastaukseksi kuusi. Nyt kuusi esinettä laitetaan neljännelle riville kymmenien sarakkeeseen, koska piti muistaa, että kerrottiin oikeasti kymmenellä. Sitten kerrotaan $1 \cdot 1$, mistä tulee 1, jolloin neljännelle riville satasten sarakkeeseen laitetaan yksi esine. Ja nimenomaan satasten sarakkeeseen, koska tässä kerrottiin oikeasti $10 \cdot 10 = 100$. Sitten lasketaan taas yhteen sarakkeittain riveillä kolme ja neljä olevat esineet, mistä saadaan ykkösten sarakkeeseen 12 esinettä, kymmenien sarakkeeseen kahdeksan esinettä ja satasten sarakkeeseen yksi esine. Huomataan kuitenkin sääntökortin avulla, että ykkösten sarakkeessa on yli 9 esinettä, jolloin sieltä poistetaan 10 esinettä ja siirretään kymmenien sarakkeeseen yksi esine. Tällöin jäljelle jää kaksi esinettä ykkösten sarakkeeseen, yhdeksän esinettä kymmenien sarakkeeseen ja yksi esine satasten sarakkeeseen. Siis $12 \cdot 16 = 192$. Alla olevassa kuvassa (kuva 13) on esitetty tämä lasku välivaiheittain. Kuvasta näkyy myös missä kohdassa on tarvittu sääntökorttia.



Kuva 13: Kertolaskuesimerkki, kun kertojana on kaksinumeroinen luku $(12 \cdot 16 = 192)$

4. Tutkimustulokset

4.1. Viidesluokkalaisten alkukysely

Viides luokkalaisten alkukyselyssä (liite 1) oli kuusi laskutehtävää, joista kaksi oli yhteenlaskutehtäviä, kaksi vähennyslaskutehtävää ja kaksi kertolaskutehtävää, sekä neljä mielipidekysymystä. Yhteen- ja vähennyslaskutehtävät oli suunniteltu niin, että toisessa ei tarvinnut kymmenylitystä tai lainaamista ja toisessa tarvitsi. Laskut pyydettiin laskemaan allekkain.

Ensimmäisen tehtävän ($82 + 35 = 117$) oppilaat osasivat tosi hyvin, kahdestakymmenestäseitsemästä peräti 24 oppilasta sai sen oikein. Myös väärin menneet vastaukset olivat hyvin lähellä oikeaa ratkaisua.

Toinen yhteenlaskutehtävä ($272 + 318 = 590$) osattiin ratkaista lähes samanlaisella menestyksellä, 23 oikeaa vastausta. Merkittävää tässä tehtävässä oli kuitenkin väärien vastausten ratkaisut. Yksi oppilas oli jo sijoittaessa lukuja allekkain sijoittanut ne väärin. Kun laskettiin yhteen $272 + 318$, hän oli laittanut ykkösten tapauksessa numeron 2 ja 8 allekkain ihan oikein, mutta sitten kymmenten kohdalle numeron 7 alle hän oli laittanut numeron 3 ja numero 1, tuli kolmosen ja kahdeksikon väliin ei minkään numeron alle. Näin hän sai vastaukseksi 310. Kyseinen oppilas oli kuitenkin osannut merkitä muistinumerot ihan oikein laskiessa. Kaksi oppilasta oli laskenut, että $272 + 318 = 5810$. Nämä oppilaat olivat siis laskenut kaikki allekkain vain yhteen, eivätkä välttämättä ymmärtäneet kymmenylityksen ideaa. Mielestäni on kiinnostava, miten nämä kyseiset oppilaat eivät osanneet epäillä vastauksensa oikeellisuutta, kun saivat noin ison luvun vastaukseksi. Tätä olisi ollut mielenkiintoista tutkia lisää.

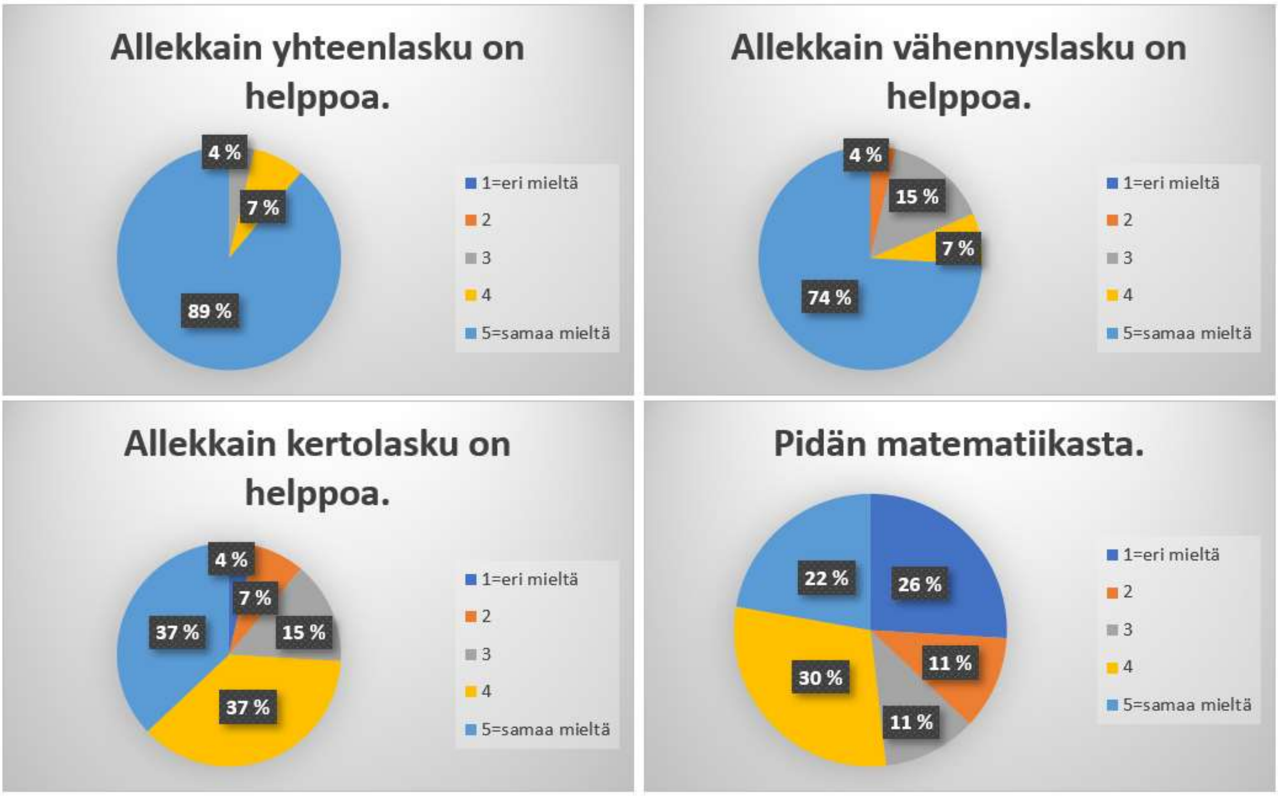
Vähennyslaskut osattiin melkein yhtä hyvin kuin yhteenlaskutkin. Kolmannesta tehtävästä ($145 - 13 = 132$), jossa ei tarvittu lainaamista, jopa 22 oppilasta sai oikean vastauksen. Neljästä väärästä vastauksesta, yksi oppilas oli vahingossa laskenut luvut yhteen ja yksi oli laskenut $145 - 133$ (vaikka lasku oli $145 - 13$), mutta silti saanut vastaukseksi 130. Hän ei ollut tehnyt mitään merkintöjä laskiessa, ainoastaan sijoittanut nämä luvut allekkain, joten ei pystytä päättelemään, mikä laskuprosesissa on mennyt väärin. Loput kaksi oppilasta olivat sijoittaneet laskut väärin allekkain ja sen vuoksi saanut vastaukseksi 15. He laittoivat siis numerot 1 ja 1 sekä 4 ja 3 allekkain ja luvun 145 ykkösten eli numeron 5 alle ei sitten tullut mitään. Ongelma oli siis lukujen sijoittamisessa oikein, eli oppilaat eivät välttämättä ole sisäistäneet lukujen paikka-arvon merkitystä.

Neljännestä tehtävästä ($490 - 73 = 417$) oikean ratkaisun sai 20 oppilasta. Vääristä vastauksista huolimatta kaikki oppilaat olivat osanneet tässä tehtävässä sijoittaa luvut oikein allekkain. Kolme oppilasta saivat tehtävässä vastaukseksi 423 ja laskusta ilmeni, että he eivät olleet käyttäneet lainaamista yhtään apuna, vaan kun piti nollasta vähentää kolme, he olivat laittaneet ratkaisuksi numeron kolme. Kaksi muuta oppilasta, jotka eivät myöskään käyttäneet lainaamista apuna olivat saman ongelman ratkaisseet niin, että kun nollasta vähennetään kolme, saadaan nolla.

Viides tehtävä, jossa laskettiin $5 \cdot 11 = 55$, sujui oppilailta todella hyvin. Peräti 24 oppilasta osasi ratkaista tehtävän oikein. Kolmesta väärästä vastauksesta yksi oppilas sai vastaukseksi 60 ja kaksi 15, joiden ratkaisusta ei ilmennyt miten tehtävä oli ratkaistu.

Viimeinen laskutehtävä oli ehdottomasti hankalin. Siinä kerrottiin kaksinumeroinen luku kaksinumeroisella luvulla $(12 \cdot 23 = 276)$ ja vain 11 oppilasta saivat oikean vastauksen. Väärissä vastauksissa oli paljon vaihtelua, osa vastauksista oli vain laitettu siihen ilman mitään laskua ja kolme oppilasta oli jättänyt tehtävän tyhjäksi. Kolme oppilasta oli saanut tehtävässä vastaukseksi 26, eli he olivat kertoneet ykköset keskenään ja kymmenet keskenään. Kaksi oppilasta, jotka saivat vastaukseksi 60 ja 69, olivat lähteneet laskemaan tehtävää ihan oikein. Toinen kertoi ensin ykkösiä vastaavalla numerolla 3 luvun 12 ja toinen numerolla 2 luvun 23, he siis laskivat juuri niin kuin allekkain kertolaskussa pitäisi. Sitten nämä oppilaat kertoivat kymmeniä vastaavalla numerolla 2 luvun 12 ja numerolla 1 luvun 23, mutta eivät sitten ymmärtäneet sitä, että oikeasti kerrottiin luvulla 20 tai 10. Näin ollen he sijoittivat saadut luvut allekkain vain suoraan ykkösten ja kymmenien paikalle, jolloin he päätyivät väärään vastaukseen. Yksi oppilas oli lähtenyt ratkaisemaan laskua hajottamalla luku 12 lukuihin 2 ja 10. Hän oli ensin laskenut allekkain $23 \cdot 2 = 46$ ja sitten $46 \cdot 10 = 460$. Näiden kahden allekkainlaskun välillä oli $+$ $-$merkki, mutta vastaukseksi oli kuitenkin jätetty tuo 460.

Lopuksi oppilailta kysyttiin neljä mielipidekysymystä, joihin heidän piti vastata ympyröimällä heidän mielipidettä vastaava vastaus asteikolla 1-5, jossa 1 = olen eri mieltä ja 5 = olen samaa mieltä. Ensimmäiset kolme kysymystä koskivat allekkain yhteen-, vähennys- ja kertolaskun haastavuutta. Allekkain yhteenlasku oli helppoa 24 oppilaan mukaan ja vain yksi oppilas ympyröi luvun 3, eli ei oikein osannut sanoa. Allekkain vähennyslasku oli 20 oppilaan mielestä helppoa, yhden oppilaan mielestä se oli hankalampaa ja hän ympyröi luvun kaksi. Muut jakautuivat näiden välille. Kysyessä onko allekkain kertolasku helppoa, 10 oppilasta oli täysin samaa mieltä ja 10 lähes samaa mieltä. Yksi oli asiasta täysin eri mieltä ja loput sitten näiden väliltä. Viimeinen mielipidekysymys koski oppilaiden mielipidettä yleisesti matematiikkaa kohtaan. Vastaukset jakautuivat yllättävän tasaisesti kaikkien vaihtoehtojen välillä. Alla olevissa ympyrädiagrammeissa (kuva 14) näkyy oppilaiden vastausten jakautuminen prosentteina.



Kuva 14: 5.-luokkalaisten alkukyselyn mielipidekysymykset asteikolla 1(eri mieltä) – 5(samaa mieltä)

4.2. Viidesluokkalaisten loppukysely

Loppukyselyssä (liite 2) viidennen luokan oppilailla oli kuusi laskutehtävää, viisi mielipidekysymystä, joihin alkukyselyn tapaan vastattiin asteikolla 1-5, sekä kaksi mielipidekysymystä, johon vastattiin kirjallisesti. Tehtävät olivat loppukyselyssä hiukan haastavampia kuin alkukyselyssä, mikä näkyy tuloksissa. Haastavamman siitä teki se, että toisessa yhteenlaskutehtävässä tarvittiin kymmenylitystä kahteen kertaan ja toisessa vähennyslaskutehtävässä taas piti lainata kahteen kertaan. Oppilaita kannustettiin käyttämään kymmenjärjestelmäruudukkoa apunaan tehtävien tekemisessä, mutta vain kolme oppilasta käytti.

Ensimmäinen tehtävä oli yksinkertainen yhteenlaskutehtävä $(47 + 36 = 83)$, jossa tarvittiin kymmenylitystä vain kerran. Tämän tehtävän oppilaat osasivat todella hyvin: 24 oppilasta kahdestakymmenestäseitsemästä ratkaisi tehtävän oikein. Kaksi vastausta olivat lähellä oikeaa vastausta ja yksi oppilas jätti tehtävän tyhjäksi.

Toisessa tehtävässä piti laskea yhteen $1276 + 624 = 1900$, jossa laskiessa ensin ykköset yhteen, niitä tulee kymmenen, eli täytyy osata merkitä oikein. Sitten tämän jälkeen, kun lasketaan kymmenet yhteen lisäten siihen myös ykkösistä täyteen tullut kymmenen, saadaan vastaukseksi taas kymmenen. Tämä tehtävä oli huomattavasti hankalampi kuin ensimmäinen, oppilaista vain 18 sai ratkaistua tehtävän oikein. Kaksi oppilasta sai vastaukseksi 1800, vaikka muuten olivat laskeneet ja merkinneet oikein, mutta unohtivat satasten kohdalla yhden numeron. Yksi oppilas sai vastaukseksi 1910 ja toinen 2000. Näiden kahden oppilaan tapauksessa oli käynyt niin, että merkinnät olivat taas ihan oikein, mutta he olivat jotenkin päässä laskiessa saaneet väärän vastauksen. Mielenkiintoisin vastaus tähän tehtävään oli 7516, jonka yksi oppilas oli saanut sijoittamalla laskut väärin allekkain. Laittanut siis luvun 1276 tuhansia vastaavan numeron 1 ja luvun 624 satasia vastaavan numeron 6 allekkain, jonka jälkeen kaikki muutkin menivät väärin.

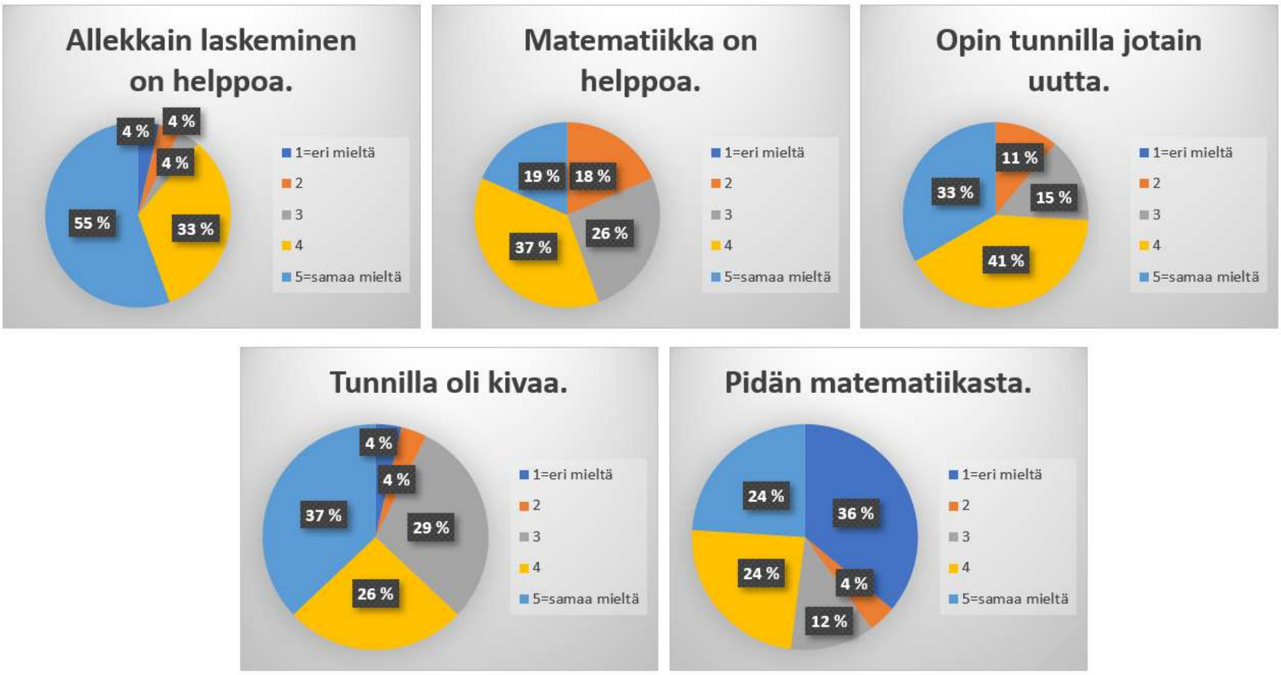
Kolmas tehtävä oli vähennyslaskutehtävä ($274 - 68 = 206$), jossa piti käyttää lainaamista apunaan kerran. Oppilaista 21 sai ratkaistua tehtävän oikein. Peräti neljä oppilasta sai vastaukseksi 214, mutta laskuista ei käynyt ilmi, miten tähän vastaukseen päädyttiin.

Seuraava vähennyslaskutehtävä olikin sitten paljon haastavampi, jonka vuoksi vain 15 oppilasta sai tehtävän oikein. Tehtävänä oli laskea $400 - 174 = 226$. Suurin vaikeus tässä oli se, että lainaamista tarvittiin kahteen kertaan peräkkäin. Jopa viisi oppilasta oli saanut tehtävän ratkaisuksi 236. Näissä kaikissa vastauksissa oli yhteistä se, että oppilaat olivat ymmärtäneet lainata ensin sieltä satasista ja sitten taas kymmenistä, mutta eivät tajunneet vähentää sitten kymmenien kohdalla se yksi lainattu kymmenen pois. Toiseksi yleisin vastaus oli 374, jonka vastasi kolme oppilasta. Tämän vastauksen saaneet oppilaat eivät olleet käyttäneet lainausta yhtään apuna vaan ajatelleet, että kun nollasta vähennetään neljä saadaan neljä ja samalla tavalla saadaan seitsemän vähennettäessä nollasta seitsemän. Hyvin saman tyylinen kuin tämä vastaus, oli myös kahden oppilaan vastaama luku 300. Heidän tapauksessa idea poikkesi edellisestä siinä, että kun nollasta lähdetään vähentämään jotain saadaan aina nolla.

Viidennessä tehtävässä piti laskea kertolasku $6 \cdot 18 = 108$, jonka 16 oppilasta oli osannut ratkaista oikein. Yksi oppilas oli kirjoittanut tehtävän kohdalle, ettei osaa ja kaksi oppilasta oli saanut vastaukseksi 54 laskemalla ensin, että $6 \cdot 8 = 48$ ja sitten lisännyt siihen $+6$. Muut väärät vastaukset olivat ihan laidasta laitaan, eikä laskuista käynyt ilmi, miten niihin ratkaisuihin oli päädytty.

Viimeinen tehtävä oli tarkoituksella vaikeampi. Siinä kerrottiin kolminumeroinen luku kaksinumeroisella luvulla ($12 \cdot 105 = 1260$), minkä lisäksi tarvittiin kymmenylitystä. Ainoastaan kahdeksan oppilasta osasi ratkaista tämän tehtävän oikein. Yksi oppilas jätti tehtävän tyhjäksi ja neljä oppilasta saivat vastaukseksi 315. Nämä oppilaat olivat taas laskeneet oikein ensin $2 \cdot 105 = 210$ ja sitten $1 \cdot 105 = 105$, mutta eivät muistaneet, että toisessa kohdassa oikeasti kerrottiin $10 \cdot 105$. Tämän takia, he laskivat vain sitten yhteen $210 + 105$ ja saivat vastaukseksi 315. Yksi oppilas oli osannut laskea ihan oikein ja merkinnyt muistinumeron oikein, mutta lopussa oli tapahtunut todennäköisesti pieni huolimattomuusvirhe ja oikeista välivaiheista huolimatta, hän sai vastaukseksi 1200. Muista vastauksista ei käynyt ilmi, miten niihin oli päädytty ja vastaukseksi oli saatu lukuja 40:stä aina 6015:a asti.

Seuraavassa kohdassa kysyttiin mielipidettä asteikolla 1-5 viiteen eri väittämään samalla tavalla kuin alkukyselyssä. Ensimmäisenä kysyttiin, onko allekkain laskeminen helppoa, johon 15 oppilasta vastasi olevansa samaa mieltä ja 9 oli lähes samaa mieltä, eli olivat ympyröineet luvun 4. Yksi oli vastannut olevansa eri mieltä. Toisessa kohdassa väitettiin, että matematiikka on helppoa. Tämä kohta oli jakanut oppilaat melkein puoliksi, 15 oppilasta olivat olleet lähes samaa mieltä (valinneet kohdat 4 ja 5) ja kukaan ei ollut täysin eri mieltä vaan loput jakautuivat keskivaiheille (valinneet kohdat 2 ja 3). Seuraavaksi kysyttiin, olivatko oppilaat oppineet tunnilla jotain uutta ja 20 oppilasta olivat vastanneet olevansa ainakin lähes samaa mieltä, loput seitsemän eivät oikein olleet samaa eikä eri mieltä (valinneet kohdan 3) tai sitten olivat osittain eri mieltä. Neljännessä kohdassa kysyttiin, oliko oppilailla ollut kivaa tunnilla. Tähän oppilaista 25 olivat joko lähes samaa mieltä tai sitten valinneet kohdan 3, eli eivät olleet samaa eikä eri mieltä. Viimeisenä kysyttiin taas pitävätkö oppilaat matematiikasta. Kuusi oppilasta sanoi pitävänsä matematiikasta ja yhdeksän oppilasta ei pitänyt. Loput vastaukset jakautuivat aika tasaisesti näiden välille niin, että noin puolet olivat samaa mieltä ja puolet eri mieltä. Kaksi oppilasta oli jättänyt tämän kohdan tyhjäksi. Alla olevissa ympyrädiagrammeissa (kuva 15) näkyy oppilaiden mielipiteiden jakauma prosentteina.



Kuva 15: 5.-luokkalaisten loppukyselyn mielipidekysymykset asteikolla 1(eri mieltä) - 5(samaa mieltä)

Lopuksi oppilailta kysyttiin vielä “mikä tunnilla oli kivaa?” ja “mikä oli tylsää?”. Näihin oppilaat vastasivat kirjallisesti. Kysyttäessä, mikä oli kivaa, kuusi oppilasta oli vastannut, että kaikki ja kuusi, että makaronit tai niillä laskeminen. Yhden oppilaan mielestä oli kivaa syödä makaronia, vaikka tämä oli kiellettyä. Viiden oppilaan mielestä kivaa oli lopputunnista pidetty askartelutuokio, jossa askartelimme hexahexaflexagonit. Kaksi oppilasta oli sitä mieltä, että mikään ei ollut kivaa ja kuuden mielestä kivaa oli laskeminen, joista kaksi tarkensi, että nimenomaan laskeminen parin kanssa. Yksi oli vastannut "öööö…".

Kuuden oppilaan mielestä mikään ei ollut tylsää, kaksi ei tiennyt mikä oli tylsää ja yksi oli jättänyt kysymyksen tyhjäksi. Yksi oppilas oli sitä mieltä, että kaikki oli tylsää ja toisen mielestä kaikki muu paitsi makaronit oli tylsää. Neljän oppilaan mielestä laskeminen oli tylsää, joista kaksi tarkensi, että nimenomaan makaroneilla laskeminen. Eräs oppilas ei pitänyt askartelusta ja toisesta oli tylsää, kun ei osannut käännellä rakennettua hexahexaflexagonia. Kolme oppilasta olivat vastanneet vain "ööö…", "ömh…" ja "doo doo". Yhden oppilaan mielestä tylsintä oli kymmenjärjestelmäruudukko ja yksi ajatteli tylsintä olevan matematiikka. Hauskin vastaus kaikista oli allekirjoittaneen mielestä se, kun yksi oppilas oli vastannut, että tylsintä oli ohjeiden kuuntelu.

4.3. Viidesluokkalaisten yhteenveto

Viidennen luokan oppilaat olivat siis tehneet alkukyselyt pari viikkoa ennen kuin tutkija meni sinne opettamaan heille kymmenjärjestelmäruudukon käyttöä ja tekemään loppukyselyt. Kymmenjärjestelmäruudukon käytön opiskelemiseen oli varattu vajaa pari tuntia aikaa. Aikaa oli siis hyvin rajallisesti, mikä todennäköisesti ainakin osittain vaikuttaa tutkimustuloksiin. Aiemmissa kappaleissa käsiteltiin tarkemmin tehtäväkohtaisesti alku- ja loppukyselyjä, joten keskitytään nyt tarkastelemaan yksittäisten oppilaiden tuloksia ja heiltä saatua suullista palautetta.

Vertaillessa oppilaiden alku- ja loppukyselyn oikeita vastauksia, huomataan yllättäen, että suurimmalla osalla oppilaista tulokset huononivat. Kahdestakymmenestäseitsemästä oppilaasta peräti 15. oppilaan tulokset huononivat, kahdeksan oppilaan tulokset pysyivät samana ja vain neljä oppilasta onnistui parantamaan tuloksiaan. Jokainen tuloksensa parantunut oppilas sai yhden tehtävän enemmän oikein loppukyselyssä. Näistä kukaan ei käyttänyt apunaan kymmenjärjestelmäruudukkoa. Itseasiassa kaikista oppilaista vain kolme oppilasta käytti ruudukkoa apunaan, ja näiden kaikkien tulokset huononivat. Huomionarvoista on kuitenkin se, että vaikka tulokset huononivat kaksi näistä oppilaista olivat ymmärtäneet kymmenylityksen idean. Siinä missä nämä oppilaat laskivat alkukyselyssä, että $272 + 318 = 5810$, loppukyselyssä he osasivat siirtää täyden kymmenen oikeaan paikkaan. Suurin osa virheistä olivat pieniä huolimattomuusvirheitä, koska laskut olivat suurimmalla osalla merkitty oikein. Neljä oppilasta, joilla tulokset pysyivät samana, sai kaikki tehtävät oikein, mutta mielipiteissä oli eroja. Kaksi sanoivat pitävänsä matematiikasta ja yksi ei pitänyt, vaikka tehtävät olivat hänen mielestään helppoja. Vaikka suurimalla osalla tulokset huononivat, ero ei ollut suuri. Suurin osa oppilaista osasi loppukyselyssä vain yhden tehtävän vähemmän kuin alkukyselyssä. On myös huomioitavaa, että loppukyselyssä oli tarkoituksella haastavampia tehtäviä. Vain kolmella oppilaista tulokset huononivat huomattavasti. Näistä eräs oppilas merkitsi oppineensa tunnilla jotain uutta ja hänen mielestään kaikki oli kivaa tunnilla, heikentyneistä tuloksista huolimatta. Tulosten heikentyminen vaikutti myös mielipiteeseen matematiikkaa kohtaan, sillä yksi oppilas merkitsi alkukyselyssä pitävänsä matematiikasta ja loppukyselyssä täysin päinvastoin.

Tunnilla käydyn vapaan keskustelun mukaan, oppilaat olivat yhtä mieltä siitä, että kymmenjärjestelmäruudukon idea on tosi hyvä, mutta laskeminen on kuitenkin helpompaa ilman sitä, erityisesti yhteen- ja vähennyslaskun tapauksessa. Osa oppilaista itseasiassa käytti kymmenjärjestelmäruudukkoa lähinnä kertolaskutehtävien tapauksessa. Monet oppilaat tekivät tuntitehtäviä niin, että laskivat laskut ensin päässälaskuna ja sitten vasta kokeilivat tai tarkistivat tuloksen ruudukon avulla. Ruudukon käyttämiseen meni heidän mielestään turhaa aikaa.

Jos näiden tulosten perusteella yrittää suoraan tehdä jonkinlaista johtopäätöstä siitä, onko kymmenjärjestelmäruudukosta apua kokonaislukujen yhteen-, vähennys- ja kertolaskujen oppimiseen, tulos olisi, ettei ole, koska kaikkien kolmen oppilaan, jotka käyttivät ruudukkoa apunaan, tulokset huononivat. Täytyy kuitenkin huomioida, että koko ruudukkoon tutustumiseen, sen käytön harjoitteluun ja loppukyselyn tekemiseen oli varattu alle kaksi tuntia aikaa, mikä varmasti vaikuttaa tuloksiin. Tulokset saattaisivat olla hyvin erilaiset, jos oppilaat olisivat saaneet käyttää ruudukkoa apunaan esimerkiksi joka päivä viikon ajan. Tuloksiin vaikuttaa myös se, että järjestelykysymyksistä johtuen, toimintamateriaalia päästiin kokeilemaan viidesluokkalaisten kanssa, joille on saattanut muodostua laskemisesta jo automaatio, jolloin tällainen uusi tapa vain vaikeuttaa asioita. Tätä olisi mielenkiintoista tutkia tulevaisuudessa lisää, myös nuorempien oppilaiden tapauksessa. Oppilaiden mielestä tunnilla oli kuitenkin kivaa, jolloin tätä voisi käyttää opetuksessa pelkästään motivaation lisäämistarkoituksessa, jolloin kuitenkin samalla tapahtuu oppimista.

4.4. Seitsemäsluokkalaisten alkukysely

Seitsemäsluokkalaisten alkukyselyssä (liite 4) oli kolme kohtaa. Ensimmäisessä kohdassa oli kaksi laskutehtävää, joista toinen oli yhteenlasku- ja toinen vähennyslaskutehtävä. Yhteenlaskutehtävässä tarvittiin kymmenylitystä ja vähennyslakussa lainaamista. Toisena kohtana oli täydennystehtävä, jossa piti ilmoittaa luku kokonaisten lukujen ja kymmenesosien tai pelkästään kymmenesosien avulla. Tämän tehtävän ideana oli selvittää ymmärtävätkö oppilaat paikkajärjestelmän ominaisuudet desimaalilukujen tapauksessa. Viimeisessä kohdassa oli neljä mielipidekysymystä.

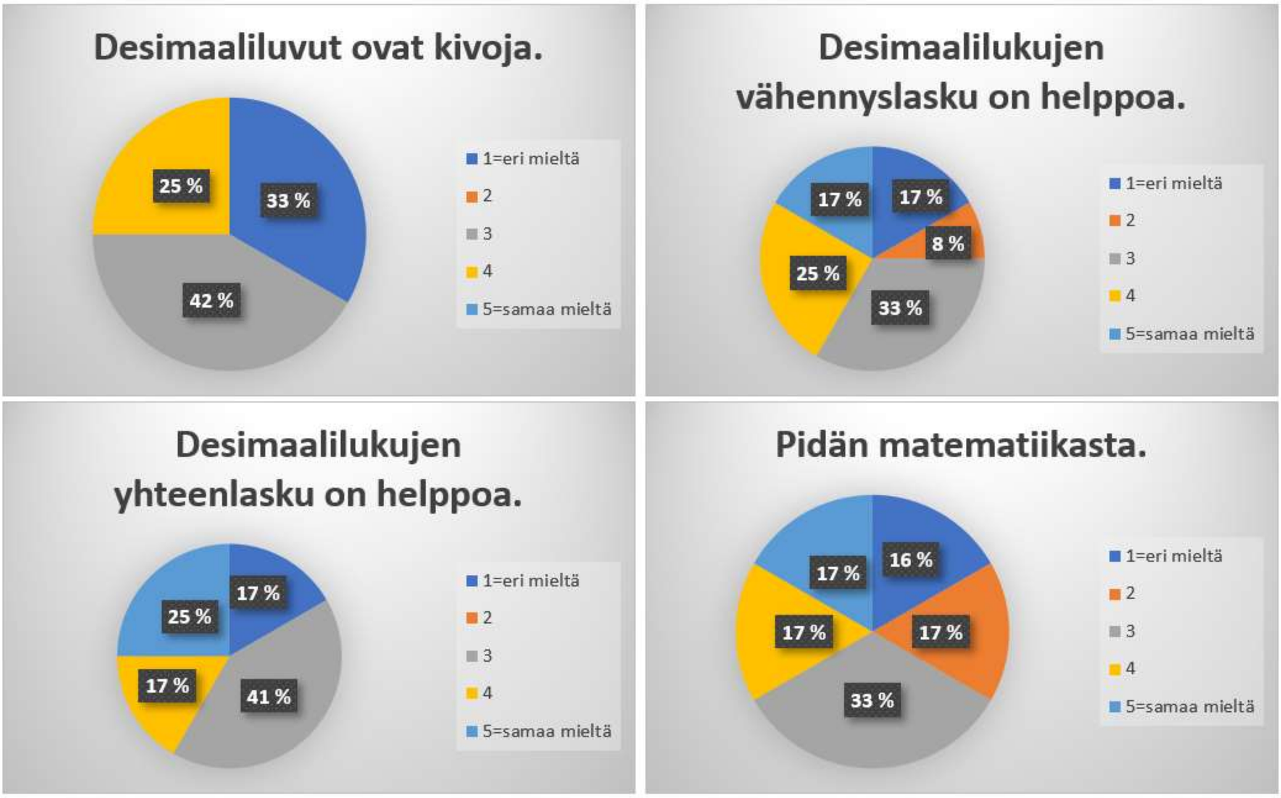
Ensimmäisessä tehtävässä laskettiin $27{,}41 + 6{,}093 = 33{,}503$. Kahdestatoista tutkimukseen osallistuneista oppilaasta yhdeksän osasi ratkaista tehtävän oikein. Yksi oppilas, joka sai vastaukseksi $13{,}703$ oli yrittänyt laskea allekkain merkkaamalla luvut oikein allekkain, mutta virheet syntyivät siinä, että ei osannut merkitä kymmenylitystä oikein. Muista vääristä vastauksista ei selvinnyt, miten niihin oli päädytty.

Toinen tehtävä $(14{,}2 - 3{,}88 = 10{,}32)$ osattiin huonommin kuin yhteenlaskutehtävä, vain puolet osasi ratkaista tehtävän oikein. Väärän vastauksen saaneista oppilaista kaksi sai vastaukseksi $10{,}3$, johon he olivat päätyneet pyöristämällä luvun $3{,}88$ luvuksi $3{,}9$, näin he pääsivät sadasosista eroon. Yksi oppilas oli saanut vastaukseksi $10{,}48$ laskemalla tehtävä allekkain laskuna. Hän oli osannut ihan oikein lainata kerran, mutta ei enää uusiksi. Joten kun luvussa $14{,}2$ ei ole merkitty näkyviin sadasosia, hän merkitsi, että tyhjästä vähennettäessä luku 8, vastaukseksi tulee luku 8. Muiden oppilaiden laskuista ei käynyt ilmi, miten he päätyivät juuri siihen ratkaisuun.

Seuraavana oli vuorossa ensimmäinen täydennä tehtävä, jossa piti täydentää lause "Luvussa $1{,}2$ on _**1**_ kokonaista ja _**2**_ kymmenesosaa". Oikeat vastaukset ovat lihavoituna. Yhtä tyhjää vastausta lukuun ottamatta, kaikki loput yksitoista oppilasta tiesi kokonaisten määrän ja kymmenen oppilasta myös kymmenesosien määrän. Yhden oppilaan mielestä kymmenesosia oli 20. Tämä tehtävä osattiin parhaiten koko alkukyselystä.

Toisena tehtävänä piti täydentää seuraava lause: "Luku $1{,}2$ voidaan ilmaista myös pelkästään kymmenesosien avulla. Tällöin luvussa $1{,}2$ on _**12**_ kymmenesosaa. Tämä tehtävä osattiin selvästi huonoiten, sillä alle puolet, vain viisi oppilasta, tiesi oikean vastauksen. Yksi jätti tämän tehtävän tyhjäksi, neljän mielestä oikea vastaus oli $0{,}12$ ja loput ehdottivat ratkaisuksi lukua 20 ja 1. Tämän tehtävän tarkoituksena oli selvittää ymmärtävätkö oppilaat paikka-arvon merkityksen ja mikä on ykkösten ja kymmenesosien yhteys, joten on harmillista, että niin harva oppilas oli osannut vastata tehtävään oikein.

Viimeisenä oppilailta kysyttiin neljä mielipidekysymystä, joihin heidän piti vastata ympyröimällä heidän mielipidettä vastaava vastaus asteikolla 1-5, jossa 1 = olen eri mieltä ja 5 = olen samaa mieltä. Ensimmäinen väittämä oli "desimaaliluvut ovat kivoja". Jopa yli kaksi kolmasosaa oppilaista, eivät pitäneet niitä kivoina. Neljä oli vastannut olevansa eri mieltä ja viisi oppilasta oli ympyröineet kohdan 3. Loput olivat lähes samaa mieltä, ympyröiden kohdan 4. Toisessa mielipidekohdassa tarkasteltiin sitä, kuinka haastavana oppilaat kokevat desimaalilukujen vähennyslaskun. Tämä kohta jakoi mielipiteitä hyvin paljon. Viisi oppilasta olivat sitä mieltä, että desimaalilukujen vähennyslasku on helppoa (valinneet kohdat 4 ja 5), kolmen mielestä se on vaikeaa (kohdat 1 ja 2) ja loppujen mielestä siltä väliltä. Seuraavassa kohdassa kysyttiin kokivatko oppilaat desimaalilukujen yhteenlaskun helpoksi. Nämä vastaukset olivat muuten hyvin samanlaisia kuin edellisessä kohdassa, ainoastaan yksi oppilas oli muuttanut vastaustaan ympyröimällä nyt kohdan 3, kohdan 2 sijasta. Viimeisenä oppilaiden piti kertoa mielipiteensä kohtaan "Pidän matematiikasta". Tässä voi ajatella vastausten jakautuvan tasan puoliksi, sillä kohtia 1, 2, 4 ja 5 ympyröi jokaista kaksi oppilasta ja loput neljä ympyröivät kohdan 3. Matematiikka selvästi jakaa siis mielipiteitä. Alla olevissa ympyrädiagrammeissa (kuva 16) näkyy oppilaiden mielipiteiden jakauma prosentteina.



Kuva 16: 7.-luokkalaisten alkukyselyn mielipidekysymykset asteikolla 1(eri mieltä) - 5(samaa mieltä)

4.5. Seitsemäsluokkalaisten loppukysely

Seitsemäsluokkalaisten loppukyselyssä (liite 5) oli alkukyselyn tapaan kaksi laskutehtävää ja kaksi täydennystehtävää. Nämä tehtävät olivat hiukan haastavampia kuin alkukyselyssä, sillä laskutehtävissä tarvittiin kymmenylitystä ja lainaamista useampaan kertaan ja täydennystehtävässä tarkasteltiin myös sadasosia kymmenesosien lisäksi. Näiden lisäksi loppukyselyssä oli kuusi mielipidekysymystä, joihin vastattiin asteikolla 1-5 sekä kaksi avointa kirjallista kysymystä, joiden avulla oli tarkoitus saada lisää palautetta. Oppilaita kehotettiin käyttämään kymmenjärjestelmäruudukkoa apunaan, mutta kukaan oppilaista ei käyttänyt.

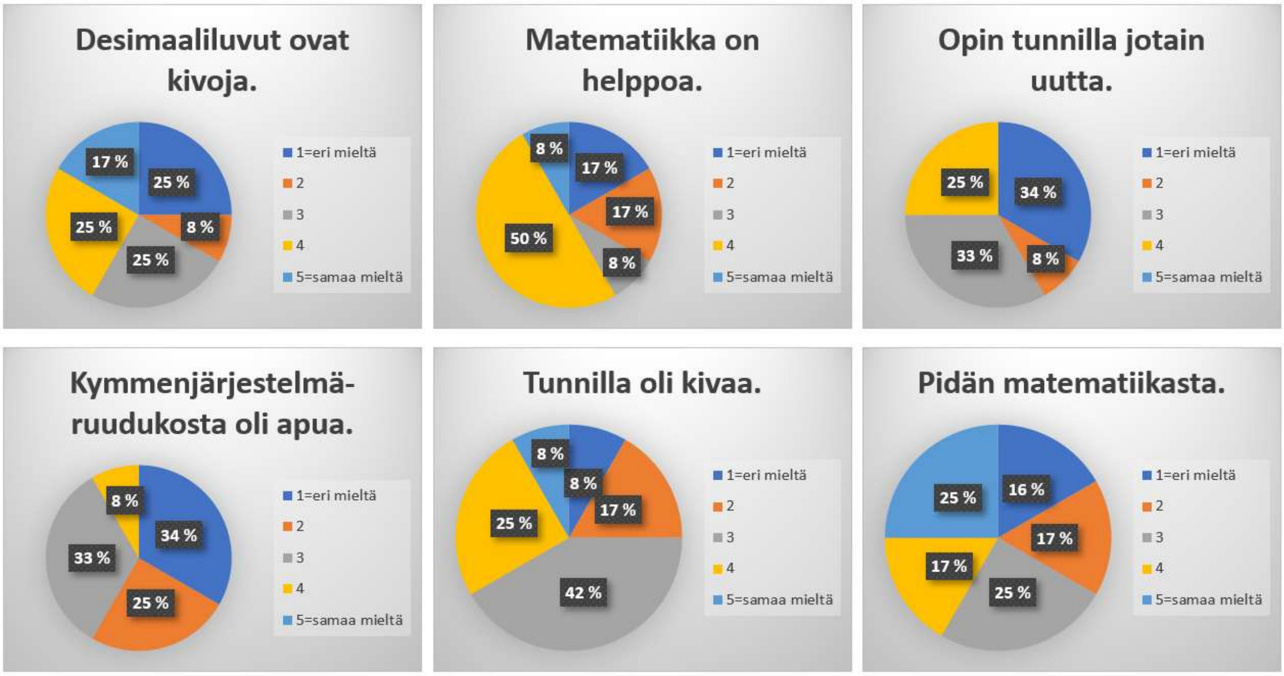
Ensimmäinen yhteenlaskutehtävä $(37{,}01 + 6{,}999 = 44{,}009)$ osattiin suhteellisen hyvin. Kahdestatoista oppilaasta yhdeksän ratkaisi tehtävän oikein, yksi jätti tyhjäksi ja loput kaksi saivat vastaukseksi $44{,}01$. Näiden kahden oppilaan ratkaisusta ei käynyt ilmi, miten tähän vastaukseen oli päädytty, mutta vastaus oli hyvin lähellä oikeaa. Nämä oppilaat olivat todennäköisesti vain pyöristäneet lukuja jossain vaiheessa laskua.

Toisessa tehtävässä laskettiin vähennyslasku $12{,}2 - 11{,}789 = 0{,}411$. Tämä tehtävä osattiin paljon heikommin kuin yhteenlaskutehtävä. Vain viisi oppilasta sai ratkaistua tehtävän oikein ja yksi jätti tehtävän tyhjäksi. Vääriä vastauksia tuli laidasta laitaan välillä $0{,}2$ ja $1{,}741$, mutta näistä laskuista ei valitettavasti käynyt ilmi, miten väärään vastaukseen oli päädytty. Oppilaat olivat suurimmaksi osaksi laittaneet vain vastauksen, vaikka heitä pyydettiin laittamaan myös välivaiheita.

Ensimmäisessä täydennystehtävässä piti täydentää lause “Luvussa 1,11 on _1_ kokonaista, _1_ kymmenesosaa ja _1_ sadasosaa”. Kaikki oppilaat osasivat vastata oikein tähän tehtävään.

Toisessa täydennystehtävässä piti sama luku kuin edellisessä kohdassa osata ilmoittaa pelkästään sadasosien avulla: “Luku 1,11 voidaan ilmaista myös pelkästään sadasosien avulla. Tällöin luvussa 1,11 on _111_ sadasosaa. Seitsemän oppilasta kahdestatoista osasi ratkaista tämän tehtävän oikein ja yksi jätti tehtävän tyhjäksi. Vääristä vastauksista kolme oli vastannut, että sadasosia on 1 ja yhden oppilaan mielestä niitä oli 11.

Seuraavana oli vuorossa kuusi mielipidekysymystä, joihin heidän piti vastata ympyröimällä heidän mielipidettä vastaava vastaus asteikolla 1-5, jossa 1 = olen eri mieltä ja 5 = olen samaa mieltä. Ensimmäinen väittämä oli “Desimaaliluvut ovat kivoja”, mikä jakoi mielipiteitä laidasta laitaan. Viiden oppilaan mielestä desimaaliluvut ovat ainakin osittain kivoja (valinneet kohdat 4 ja 5), neljä oppilasta ei pitänyt desimaalilukuja kivoina (kohdat 1 ja 2) ja loput olivat ympyröineet kohdan 3, eli eivät olleet samaa eikä eri mieltä. Toisessa kohdassa väitettiin matematiikan olevan helppoa. Vain yksi oppilas oli täysin samaa mieltä ja kaksi täysin eri mieltä. Kuuden oppilaan mielestä matematiikka on osittain helppoa (kohta 4) ja muiden oppilaiden mielipiteet jakautuivat kohdan kaksi ja kolme välille. Seuraavana kysyttiin olivatko oppilaat oppineet tunnilla jotain uutta, mistä kukaan oppilaista ei ollut täysin samaa mieltä. Viisi oppilasta kokivat, että eivät oppineet lähes mitään uutta (kohdat 1 ja 2), kolme oppilasta kokivat oppineensa ainakin jonkin verran (kohta 4) ja loput neljä sijoittuivat edellisten välille ympyröimällä kohdan 3. Neljännessä kohdassa kysyttiin, oliko kymmenjärjestelmäruudukosta apua. Kukaan oppilas ei ollut samaa mieltä siitä, että ruudukosta olisi ollut apua, ja vain yksi oppilas oli ympyröinyt kohdan 4, eli koki siitä olevan jonkin verran apua. Neljä oppilasta oli täysin eri mieltä siitä, että ruudukosta olisi apua, kolme oppilasta oli ympyröineet kohdan 2 ja loput neljä kohdan 3. Loput kaksi väitettä: “tunnilla oli kivaa” ja “pidän matematiikasta” jakoivat oppilaat kahteen osaan melkein puoliksi. Neljän oppilaan mielestä tunnilla oli kivaa (valinneet kohdat 4 ja 5) ja kolmen mielestä tunnilla ei ollut kivaa (kohdat 1 ja 2) ja samalla tavalla matematiikasta piti viisi oppilasta ja neljä ei pitänyt. Molemmissa kohdissa loput oppilaat eivät osanneet valita kumpaakaan ympyröiden kohdan 3. Alla olevissa ympyrädiagrammeissa (kuva 17) näkyy näiden mielipidekysymysten vastausten jakauma prosentteina.



Kuva 17: 7.-luokkalaisten loppukyselyn mielipidekysymykset asteikolla 1(eri mieltä) - 5(samaa mieltä)

Kyselyn lopuksi oli vielä kaksi avointa kysymystä, joihin oppilaat vastasivat kirjallisesti. Ensimmäinen kysymys oli “mikä tunnilla oli kivaa?”. Kahdestatoista oppilaasta kaksi oli jättänyt kohdan tyhjäksi, kaksi oli sitä mieltä, että mikään ei ollut kivaa ja kaksi oppilasta ei tiennyt mikä oli kivaa. Loput kuusi oppilasta olivat vastanneet seuraavasti: “kaikki”, “desimaaliluvut”, “laskeminen”, “kaverit”, “se, että sain kuunnella musiikkia” ja “oli kivaa, koska opin vähän uutta”. Musiikin kuuntelu liittyy siihen, että annoin oppilaiden kuunnella musiikkia samalla kun he laskivat, jos se ei häirinnyt laskemista, koska se saattaa auttaa joitakin oppilaita keskittymään. Tutkijana oli hienoa huomata, että ainakin yksi oppilas oli kokenut oppineensa vähän uutta ja halusi siitä vielä tässä vaiheessa erikseen kertoa, mielipidekysymyksen lisäksi.

Toisessa kohdassa kysyttiin “mikä oli tylsää?”. Kolme oppilasta oli jättänyt kohdan tyhjäksi, kolmen oppilaan mielestä mikään ei ollut tylsää, kaksi oppilasta oli taas sitä mieltä, että kaikki oli tylsää ja kahden mielestä tehtävät olivat tylsiä. Yhden mielestä tylsää oli “desimaalien laskeminen” ja viimeisen oppilaan mielestä tylsää oli se “kun piti käyttää jotain makaroneja”.

Oppilaita piti muistuttaa ja kannustaa jatkuvasti, jotta he malttoivat vastata näihin kysymyksiin. Moni oli jättänyt ensin tyhjäksi, mutta palauttaessaan paperia minulle, muistutin useampaa vielä vastaamaan näihin, sillä nämä kysymykset olivat tilan puutteen vuoksi tulostuneet paperin toiselle puolelle. Näissä kahdessa kysymyksessä näkyy kuitenkin se, miten oppilaat kokevat saman opetuksen itselle eri tavalla merkitykselliseksi ja arvostavat erilaisia asioita.

4.6. Seitsemäsluokkalaisten yhteenveto

Seitsemännen luokan oppilaat tekivät alku- ja loppukyselyt hiukan eri tavalla. Osa oli tehnyt alkukyselyt muutama päivä ennen kuin tutkija meni pitämään opetustuokiota, jolloin tehtiin loppukyselyt ja osa taas teki alku- ja loppukyselyn samana päivänä. Oppilaiden vastauksista ei kuitenkaan ilmennyt eroja siinä, miten kyselyt tehtiin. Koska alku- ja loppukyselyn vastaukset tarkasteltiin yksityiskohtaisesti edellisissä kappaleissa, keskitytään nyt yksittäisten oppilaiden vastauksiin ja yleisiin havaintoihin ja palautteeseen.

On hienoa huomata, että kahdestatoista oppilaasta jopa neljän oppilaan tulokset paranivat alku- ja loppukyselyn välillä. Näistä neljästä oppilaasta yksi oli sellainen, joka ei saanut alkukyselyssä ainuttakaan tehtävää laskettua oikein, mutta osasi loppukyselyssä laskea yhteenlaskutehtävän oikein ja sen helpomman täydentämistehtävän. Jotakin kehitystä oli siis tapahtunut. Puolet oppilaista saivat kyselyistä samat pisteet, kun tehtävät pisteytettiin. Näistä oppilaista kolme oli sellaisia, jotka saivat ratkaistua kaikki tehtävät oikein sekä alku- että loppukyselyssä. Kuitenkin kaksi heistä olivat mielipideosiossa vastanneet, että matematiikka ei ole helppoa, eivätkä he pidä matematiikasta. Toinen oli jopa sitä mieltä, että desimaaliluvuilla laskeminenkaan ei ollut helppoa. Molemmat kuitenkin osasivat laskea, vaikka se ei ole helppoa heidän mielestään. Viimeisten kahden oppilaan tulokset heikkenivät, sillä kumpikaan heistä ei saanut loppukyselyssä ratkaistua vähennyslaskutehtävää oikein. Suurta tulosten heikentymistä ei siis ollut kenelläkään.

Muuta huomionarvoista alku- ja loppukyselyn tulosten välillä oli se, että jopa kolmella oppilaalla meni vähennyslaskutehtävä loppukyselyssä väärin, vaikka alkukyselyssä osasi laskea sen ihan oikein. Voisiko syynä tähän olla se, että oppilaat eivät välttämättä ole ymmärtänyt lainaamisen periaatetta kunnolla, jolloin kun sitä tarvittiin samassa tehtävässä useampaan kertaan, ei sitä enää osattu laskea? Valitettavasti oppilaiden vastauksista ei käynyt ilmi, mistä se voisi johtua, joten tähän ei saada tuloksista vastausta. Toinen huomionarvoinen asia oli se, että alkukyselyssä peräti seitsemän oppilasta, eli yli puolet, eivät osanneet ilmoittaa desimaalilukua pelkästään kymmenesosien avulla, kun taas loppukyselyssä enää kolmasosa oppilaista ei osannut ilmoittaa lukua pelkästään sadasosien avulla. Moni osasi lopussa siis vaikeamman tehtävän, vaikka alussa ei osannut. Tästä voisi päätellä, että kymmenjärjestelmäruudukosta olisi ollut apua kymmenjärjestelmän paikka-arvon havainnollistamisessa, joka auttaa ymmärtämisessä. Siis johtopäätöksenä toiseen tutkimuskysymykseen voisi ajatella olevan se, että kymmenjärjestelmäruudukon käytöstä on apua desimaalilukujen paikka-arvon ymmärtämisessä. Otos on kuitenkin liian pieni siihen, että tämmöistä johtopäätöstä voisi yleistää, mutta ainakin joillekin oppilaille ruudukosta näyttää olevan apua, vaikka oppilaat eivät itse niin kokeneet. Siitä onko kymmenjärjestelmäruudukosta apua desimaaliluvuilla laskemisessa ei tutkimustulosten perusteella saada vastausta, koska kukaan oppilaista ei käyttänyt ruudukkoa apunaan laskiessa.

Oppilaiden mielipidekysymyksissä eroja alku- ja loppukyselyn välillä oli ainakin siinä, koettiinko desimaaliluvut kivaksi. Alkukyselyssä vain 25% oppilaista koki desimaaliluvut ainakin osittain kivaksi, eli ympyröi kohdat 4 ja 5 asteikolla 1-5, kun taas loppukyselyssä jopa 42% oppilaista koki desimaalilukujen olevan kivoja. Lisäksi vähän suurempi osuus oppilaista koki pitävänsä matematiikasta enemmän loppukyselyssä kuin alkukyselyssä.

Oppilailta opetustuokion aikana saatu palaute oli hyvin samanlaista kuin viidesluokkalaistenkin tapauksessa. Oppilaat kokivat kymmenjärjestelmäruudukon olevan hieno keksintö, mutta he kokivat sen käytön hankalaksi ja aikaa vieväksi. Heidän mielestä oli helpompaa vain laskea laskuja päässälaskuna.

5. Johtopäätökset

5.1. Tutkimuksen luotettavuus

Tutkimuksessa käytettiin tutkimusmenetelmänä kehittämistutkimusta, jonka luotettavuutta on kritisoitu usein tutkimuskirjallisuudessa. Koska kehittämistutkimus on suhteellisen uusi tutkimusmenetelmä, sille ei ole ehtinyt kehkeytyä vahvaa tutkimusperinnettä, joka vaikuttaa tutkimuksen luotettavuuteen. Tutkijoilla on erilaisia näkemyksiä kehittämistutkimuksen vahvuuksista. Toiset näkevät tutkimustulosten yleistettävyyden haasteena, kun toisten mielestä se on kehittämistutkimuksen vahvuus. Kehittämistutkimuksen tutkimustuloksia ei välttämättä tilastollisesti pystytä todistamaan merkitseväksi, vaan sen vahvuudet ovat käytännöllisyydessä; se tuottaa käytännönläheistä tietoa. Lisäämällä syklien ja testaamisen määriä sekä tarkalla raportoinnilla, voidaan tutkimuksen luotettavuutta parantaa. (Pernaa, 2013)

Tässä tutkimuksessa syklien määrä jäi vähäiseksi tutkimuksen suppeuden vuoksi, mutta raportointiin pyrittiin panostamaan. Koska tutkimuksessa käytettiin vain määrällistä tutkimusmenetelmää, eikä laadullista, voidaan tutkimuksen luotettavuutta arvioida myös validiteetin ja reliabiliteetin avulla. Validiteetti kertoo, kykeneekö tutkimus vastaamaan siihen, mitä on ollut tarkoitus tutkia (Pernaa, 2013, s.18). Tässä tutkimuksessa validiteettia kuvaa se, vastaavatko alku- ja loppukyselyn kysymykset tutkimuksen kannalta merkittäviin asioihin. Alku- ja loppukyselyssä olevat tehtävät ja mielipidekysymykset vastaavat yhdessä analysoitaessa suurimmaksi osaksi tutkimuskysymyksiin. Ainoastaan viidesluokkalaisten loppukyselyyn olisi kaivattu yksi mielipidekysymys lisää koskien sitä, oliko kymmenjärjestelmäruudukosta apua oppilaiden mielestä. Tämä lisättiin sitten seitsemäsluokkalaisten loppukyselyyn. Jos aikaa olisi ollut enemmän, olisi erityisesti seitsemäsluokkalaisille voinut lisätä muutaman tehtävän, jolloin olisi ehkä saatu paremmin vastauksia tutkimuskysymyksiin. Alku- ja loppukyselyn kysymykset olisivat vastanneet paremmin tutkimuskysymyksiin vain, jos jollain tavalla oppilaat olisi saanut käyttämään ruudukkoa enemmän apunaan.

Toisaalta “reliabiliteetti merkitsee luotettavuutta ja tulosten toistettavuutta” (Pernaa, 2013, s.18). Reliabiliteettiin vaikuttaa tutkimuksen otos, sillä pienen otoksen tuloksia on hyvin hankalaa lähteä yleistämään. Tässä tutkimuksessa otos oli hyvin pieni, jonka lisäksi monet eivät käyttäneet kymmenjärjestelmäruudukkoa apunaan tehtäviä tehdessä, mikä oli tutkimuksen tavoitteena. Näiden lisäksi ruudukon käytön opiskeluun oli varattu hyvin niukasti aikaa, joten tutkimustuloksia ei voida pitää täysin luotettavina. Tutkimuksen toimintamateriaali olisi päästävä kokeilemaan isommalle joukolle ja paremmalla ajalla, jotta reliabiliteettia voitaisiin parantaa.

Kehitetyn toimintamateriaalin hyödystä on pienestä tutkimuksen osallistujamäärästä johtuen vaikeaa vetää johtopäätöstä. Kehitetty kymmenjärjestelmäruudukko ohjeineen ovat kuitenkin tässä tutkimuksessa valmiina siirrettävässä muodossa, jolloin opettajat tai opiskelijat voivat ottaa materiaalin käyttöön ja halutessaan tutkia lisää sen toimivuutta jatkossa.

5.2. Pohdintaa tutkimuksesta ja sen jatkokehittämismahdollisuuksista

Kuten tutkimuksen teoriaosuudesta huomaa, on kymmenjärjestelmän ja sen ominaisuuksien hallitseminen tärkeä osa matematiikan oppimista. Itseasiassa lähes kaikki mitä kouluopetuksessa opetetaan matematiikasta, pohjautuu kymmenjärjestelmän hallitsemiseen. Perusasiat täytyy olla kunnossa ennen kuin siirrytään kehittyneempään matematiikkaan. Teoriaosuudesta huomataan kymmenjärjestelmävälineitä olevan jo markkinoilla useita erilaisia. Kuitenkin suurin osa näistä toimintamateriaaleista ovat maksullisia tai numeroiden paikka-arvon merkitsemiseen on käytetty eri muotoisia tai kokoisia esineitä, jolloin oppilaiden ymmärrys kymmenjärjestelmän paikka-arvosta saattaa perustua kokoon. Sellaisia välineitä, joissa tarvittaisiin abstraktimpaa, ei muotoon tai kokoon perustuvaa, ajattelua on hyvin rajoitetusti. Tämän vuoksi tutkimuksessa kehitetty kymmenjärjestelmäruudukko on oiva lisä kymmenjärjestelmävälineiden joukkoon. Kymmenjärjestelmäruudukon etuna on se, että sen käyttäminen on ilmaista, jolloin kaikilla kouluilla on samat mahdollisuudet ottaa ruudukko käyttöönsä. Materiaalina voidaan käyttää melkein mitä tahansa koulusta löytyvää. Lisäksi kymmenjärjestelmäruudukon avulla voidaan helposti laskea sekä paljon suuremmilla että pienemmillä luvuilla, ainoastaan lisäämällä sarakkeita ruudukon vasemmalle tai oikealle puolelle. Halutessaan voidaan muuttaa sääntökortti vastaamaan jotain muuta lukujärjestelmää, kuin kymmenjärjestelmää. Voidaan esimerkiksi harjoitella viisijärjestelmässä laskemista, jolloin ruudukko toimii kuitenkin samalla tavalla. Tästä voisi olla hyötyä esimerkiksi opettajaopiskelijoille. Kun heidät laitetaan laskemaan muussa kuin kymmenjärjestelmässä, he huomaavat millaisia haasteita oppilailla saattaa ilmestyä kymmenjärjestelmän tapauksessa. Yhdellä välineellä on siis monta eri ominaisuutta.

Tutkimustuloksia tarkastellessa täytyy ottaa huomioon, että tutkimuksen osallistujamäärä oli alhainen. Tutkijana tässä tuli hyvä opetus, että vaikka alkuperäisen suunnitelman mukaan tutkimukseen on osallistumassa reilu määrä oppilaita, voi loppuen lopuksi otanta olla hyvin pieni. Tähän vaikuttaa muun muassa se, että jokaiselta oppilaalta täytyy saada tutkimuslupa. Erityisesti seitsemäsluokkalaiset eivät tämän tutkimuksen perusteella muista palauttaa tutkimuslupalappuja, jolloin otanta pienenee. Tämän vuoksi tutkimuskysymyksiin ei saada yleistettyä vastausta, mutta tutkimustulosten perusteella voidaan päätellä, että desimaalilukujen paikka-arvon ymmärtämiseen on kymmenjärjestelmäruudukosta apua. Tämä on yhteydessä aikaisempiin tutkimustuloksiin (teoriaosuus), joiden mukaan toimintamateriaalin käyttö tukee desimaalilukujen oppimista.

Tässä tutkimuksessa keskityttiin tutkimaan ja opettamaan yhteen-, vähennys- ja kertolaskua kymmenjärjestelmäruudukon avulla. Desimaaliluvuilla tutkittiin vain yhteen- ja vähennyslaskua.

Ruudukkoa voidaan kuitenkin käyttää apuna myös jakolaskujen tapauksessa sekä desimaalilukujen kerto- ja jakolaskussa. Jatkossa kymmenjärjestelmäruudukkoa voitaisiin kehittää esimerkiksi juuri lisäämällä ohjeet siihen, miten ruudukko toimii kokonaislukujen jakolaskun ja/tai desimaalilukujen kerto- ja jakolaskun tapauksessa. Eräs mahdollinen jatkotutkimusidea voisi olla se, että toteuttaa tutkimuksen muuten samalla tavalla kuin tässä tutkimuksessa, mutta käyttää otantana paljon suurempaa joukkoa ja käyttää kymmenjärjestelmäruudukon käyttämiseen enemmän aikaa. Kokonaislukujen tapauksessa olisi mielenkiintoista tutkia myös nuorempia oppilaita. Tulevaisuudessa voisi esimerkiksi seurata sadan kolmosluokkalaisen kymmenjärjestelmän oppimisen kehittymistä, kun kymmenjärjestelmäruudukkoa käytetään opetuksessa jatkuvasti viikon ajan. Toisaalta tämä vaatisi tutkijalta paljon resursseja. Jatkotutkimus voitaisiin toteuttaa myös laadullisena eli kvalitatiivisena tutkimuksena. Tutkimuksen voisi toteuttaa esimerkiksi seuraamalla ihan muutaman oppilaan kymmenjärjestelmäruudukon käyttöä tiettynä aikana, samalla haastattelen heitä säännöllisesti, jotta saadaan hyvä kuva ruudukon käytön vaikutuksista oppilaiden ajatuksiin ja tunteisiin. Muita jatkotutkimusmahdollisuuksia voisi olla esimerkiksi kymmenjärjestelmäruudukon ja jonkin muun kymmenjärjestelmävälineen käytön eroavaisuuksista tai miten siirtyminen esimerkiksi yleisimmistä muovisista kymmenjärjestelmävälineistä (kuva 2), joissa koko ja muoto erottaa paikka-arvot toisistaan, abstraktimpaan kymmenjärjestelmäruudukon käyttöön vaikuttaa oppilaiden oppimisen kehittymisessä. Erilaisia jatkotutkimuksen vaihtoehtoja on siis useita.

Lähteet

Aksela, M. & Pernaa, J. 2013. Kehittämistutkimus pro gradu-tutkielman menetelmänä. Teoksessa Pernaa, J. (toim.) Kehittämistutkimus opetusalalla. Juva: PS-kustannus, 181-200.

Behrens, D. 2015. How a digital place value chart could foster substantial understanding of the decimal place value system. Konrad Krainer; Naďa Vondrová. CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Feb 2015, Prague, Czech Republic. pp.2467-2472, Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01289335/document

Haapasalo, L. 2004. Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää? Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) Matematiikka: näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 50-83.

Huhtala, S. & Laine, A. 2004. “Matikka ei ole mun juttu” – Matematiikkavaikeuksien syntyminen ja niihin vaikuttaminen. Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) Matematiikka: näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 320-346.

Hunter, J., Turner, I., Russel, C., Trew, K. & Curry, C. 1994. Learning Multi-unit Number Concepts and Understanding Place Value. Educational Psychology, vol. 14, no. 3, 269-282. https://doi.org/10.1080/0144341940140302

Hyvönen, 2012. Design-tutkimuksen lähtökohtia -luentomateriaali. Oulun yliopisto. https://www.slideshare.net/pirikko/dbr-johdanto-2012

Ikäheimo, H. 2002. Iloa ja ymmärrystä matematiikkaan. Helsinki: Opperi.

Ikäheimo, H. & Risku, A. 2004. Matematiikan esi- ja alkuopetuksesta. Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) Matematiikka: näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 222-240.

Kennedy, L. 1986. “A Rationale.” The Arithmetic Teacher, vol. 33, no. 6, 6–32. https://www.jstor.org/stable/41192831

Leino, J. 2004. Konstruktivismi matematiikan opetuksessa. Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) Matematiikka: näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 20-31.

Lindgren, S. 1990. Toimintamateriaalin käyttö matematiikan opiskelussa. Tampereen yliopisto. Vammalan kirjapaino Oy.

Linnanmäki, K. 2004. Minäkäsitys ja matematiikan oppiminen. Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) Matematiikka: näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 241-254.

MacDonald, A. 2008. "But what about the oneths?" A Year 7 student's misconception about decimal place value. Australian Mathematics Teacher, 64 (4), 12-16. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ818771.pdf

Moody, B. 2011. Decipipes: Helping Students to "Get the Point". Australian Primary Mathematics Classroom, vol. 16, no. 1, 10-15. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ925884.pdf

Opetushallitus. 2014. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014.

Pernaa, J. 2013. Kehittämistutkimus tutkimusmenetelmänä. Teoksessa Pernaa, J. (toim.) Kehittämistutkimus opetusalalla. Juva: PS-kustannus, 9-26.

Pönkä, H. 2008. Design-tutkimus -luentomateriaali. Oulun yliopisto. https://www.slideshare.net/hponka/designtutkimus

Rossi, M. & Vainio-Rantanen, E. 1994. Toimintamateriaalin käyttö yläasteen matematiikassa. Teoksessa Seppälä, R. (toim.) Matematiikka - taitoa ajatella. Jyväskylä: Gummerus Kirjapaino Oy, 126-132.

Solovieva, Y., Rosas Rivera, Y., Quintanar, L. & García M. A. 2013. Symbolic Representation for Introduction of Concept of Decimal System in Mexican School Children. International Education Studies, vol. 6, no. 10, 102-111. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1068635.pdf

Sowder, J. 1997. Place Value as the Key To Teaching Decimal Operations. Teaching Children Mathematics, vol. 3, no. 8, 448-453. https://web.stevens.edu/golem/llevine/CIESE/place_value-decimal%20operations.pdf

Tall, D. 2008. The Transition to Formal Thinking in Mathematics. Mathematics Education Research Journal, 2008, 20 (2), 5-24. https://doi.org/10.1007/BF03217474

Tempier, F. 2015. New perspectives for didactical engineering: an example for the development of a resource for teaching decimal number system. Journal of Mathematics Teacher Education, vol. 19, no. 2-3, 261-276. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9333-8

Yrjönsuuri, R. 2004. Matemaattisen ajattelun opettaminen ja oppiminen. Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) Matematiikka: näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 111-122.

Yrjönsuuri, R. & Yrjönsuuri, Y. 2004. Matematiikan opiskelun ja opetuksen käsitteet. Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) Matematiikka: näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 123-137.

Liitteet

Liite 1: 5.-luokkalaisten alkukysely

Alkukysely 5.-luokkalaisille

Etunimi: ________________________________

1. Laske allekkain.
   a.) $82 + 35$

   b.) $272 + 318$

   c.) $145 - 13$

d.) $490 - 73$

e.) $5 \cdot 11$

f.) $12 \cdot 23$

2. Ympyröi mielipidettäsi parhaiten kuvaava kohta, kun 1 = olen eri mieltä ja 5 = olen samaa mieltä.

	eri mieltä				samaa mieltä
Allekkain yhteenlasku on helppoa.	1	2	3	4	5
Allekkain vähennyslasku on helppoa.	1	2	3	4	5
Allekkain kertolasku on helppoa.	1	2	3	4	5
Pidän matematiikasta.	1	2	3	4	5

Liite 2: 5.-luokkalaisten loppukysely

Loppukysely 5.-luokkalaisille

Etunimi: ________________________________

1. Laske allekkain. Voit käyttää apunasi kymmenjärjestelmäruudukkoa.

   a.) $47 + 36$

   b.) $1276 + 624$

   c.) $274 - 68$

d.) $400 - 174$

e.) $6 \cdot 18$

f.) $12 \cdot 105$

2. Ympyröi mielipidettäsi parhaiten kuvaava kohta, kun 1 = olen eri mieltä ja 5 = olen samaa mieltä.

	eri mieltä				samaa mieltä
Allekkain laskeminen on helppoa.	1	2	3	4	5
Matematiikka on helppoa.	1	2	3	4	5
Opin tunnilla jotain uutta.	1	2	3	4	5
Tunnilla oli kivaa.	1	2	3	4	5
Pidän matematiikasta.	1	2	3	4	5

Mikä tunnilla oli kivaa?

Mikä oli tylsää?

Liite 3: Tehtäviä 5.-luokkalaisille

Tehtäviä

Käytä tehtävien tekemisen apuna kymmenjärjestelmäruudukkoa ja pieniä esineitä. **Älä tee merkintöjä tähän paperiin**, vaan kirjoita laskut omalle paperille samalla kun lasket ruudukon avulla.

1. Laske allekkain.
   a. 396 + 235
   b. 2222 + 486
   c. 86 – 68
   d. 474 – 198
   e. 4 · 206
   f. 12 · 43

2. Muodosta lauseke ja laske allekkain.
   a. Luokassa on 17 poikaa ja 9 tyttöä. Kuinka monta oppilasta heitä on yhteensä?
   b. Lauri Markkanen heitti ensimmäisessä pelissä 32 pistettä ja toisessa pelissä 16 pistettä. Kuinka monta pistettä enemmän hän heitti ensimmäisessä pelissä?
   c. Luca ui 25 metrin altaan edestakaisin neljä kertaa. Montako metriä Luca ui?

3. Laske allekkain.
   a. 408 + 1756
   b. 94 + 3009
   c. 741 – 555
   d. 1000 – 395
   e. 3 · 374
   f. 21 · 151

4. Muodosta lauseke ja laske allekkain.
   a. Matti teki jalkapallokauden aikana 106 maalia ja Antti teki 98 maalia. Montako maalia pojat tekivät yhteensä?
   b. Turusta Jyväskylään on 308km ja Turusta Helsinkiin 165km. Kuinka paljon pidempi matka on Turusta Jyväskylään kuin Helsinkiin?
   c. Anni keitti 12 perunaa. Yksi peruna painoi keskimäärin 55 grammaa. Kuinka paljon perunat painoivat yhteensä?

5. Muodosta lauseke ja laske allekkain.
   a. Annalla on 1007 ja Maijalla 94 postimerkkiä. Kuinka monta postimerkkiä tytöillä on yhteensä?
   b. Suomessa oli v. 2013 arviolta 1680 karhua ja vuonna 2014 1535 karhua. Kuinka paljoin enemmän karhuja oli vuonna 2013?
   c. Helsingistä Enontekiöön on 1074km. Eemeli ajaa Helsinki-Enontekiö välin kolme kertaa kuukaudessa. Takaisin tullessa Eemeli tulee kaverin kyydillä. Montako kilometriä Eemeli ajaa yhteensä kuukaudessa?

6. Emmalla on maatilallaan 160 kananmunaa. Montako munakennoa hän tarvitsee niiden kuljettamiseen, kun yhteen munakennoon mahtuu 10 kananmunaa?

7. Lentopallojoukkueella on 1110 palloa. Yhteen pallosäkkiin mahtuu 10 palloa. Montako pallosäkkiä lentopallojoukkue tarvitsee pallojen säilyttämiseen?

Liite 4: 7.-luokkalaisten alkukysely

Alkukysely 7.-luokkalaisille

1. Laske.

   a.) $27{,}41 + 6{,}093$

   b.) $14{,}2 - 3{,}88$

2. Täydennä.

   a. Luvussa 1,2 on ____ kokonaista ja ____ kymmenesosaa.

   b. Luku 1,2 voidaan ilmaista myös pelkästään kymmenesosien avulla. Tällöin luvussa 1,2 on ____ kymmenesosaa.

3. Ympyröi mielipidettäsi parhaiten kuvaava kohta, kun 1 = olen eri mieltä ja 5 = olen samaa mieltä.

	eri mieltä				samaa mieltä
Desimaaliluvut ovat kivoja.	1	2	3	4	5
Desimaalilukujen vähennyslasku on helppoa.	1	2	3	4	5
Desimaalilukujen yhteenlasku on helppoa.	1	2	3	4	5
Pidän matematiikasta.	1	2	3	4	5

Liite 5: 7.-luokkalaisten loppukysely

Loppukysely 7.-luokkalaisille

1. Laske. Voit käyttää apunasi kymmenjärjestelmäruudukkoa.
   a.) $37{,}01 + 6{,}999$

   b.) $12{,}2 - 11{,}789$

2. Täydennä. Voit käyttää apunasi kymmenjärjestelmäruudukkoa.
   a. Luvussa 1,11 on ____ kokonaista, ____ kymmenesosaa ja ____ sadasosaa.
   b. Luku 1,11 voidaan ilmaista myös pelkästään sadasosien avulla. Tällöin luvussa 1,11 on ____ sadasosaa.

3. Ympyröi mielipidettäsi parhaiten kuvaava kohta, kun 1 = olen eri mieltä ja 5 = olen samaa mieltä.

	eri mieltä				samaa mieltä
Desimaaliluvut ovat kivoja.	1	2	3	4	5
Matematiikka on helppoa.	1	2	3	4	5
Opin tunnilla jotain uutta.	1	2	3	4	5
Kymmenjärjestelmäruudukosta oli apua.	1	2	3	4	5

Tunnilla oli kivaa.	1	2	3	4	5
Pidän matematiikasta.	1	2	3	4	5

Mikä tunnilla oli kivaa?

____

Mikä oli tylsää?

____

Liite 6: Tehtäviä 7.-luokkalaisille

Tehtäviä

Käytä tehtävien tekemisen apuna kymmenjärjestelmäruudukkoa ja pieniä esineitä. **Älä tee merkintöjä tähän paperiin**, vaan kirjoita laskut omalle paperille samalla kun lasket ruudukon avulla.

1. Laske allekkain.
   a. 3,6 + 2,55
   b. 12,99 + 0,017
   c. 0,9 – 0,002
   d. 3,1 – 1,074

2. Täydennä.
   a. Luvussa 1,48 on _____ kokonaista, _____ kymmenesosaa ja _____ sadasosaa.
   b. Luku 1,48 voidaan ilmaista myös pelkästään kymmenesosien ja sadasosien avulla. Tällöin luvussa 1,48 on _____ kymmenesosaa ja _____ sadasosaa.
   c. Luku 1,48 voidaan ilmaista myös pelkästään sadasosien avulla. Tällöin luvussa 1,48 on _____ sadasosaa.

3. Mikä luku on kolme kymmenosaa suurempi kuin
   a. 23,4
   b. 5,7
   c. 1,468?

4. Laske allekkain.
   a. 33,333 + 6,67
   b. 5,001 + 8,9
   c. 2,008 – 0,34
   d. 4,123 – 0,87

5. Täydennä.
   a. Luvussa 4,936 on _____ kokonaista, _____ kymmenesosaa, _____ sadasosaa ja _____ tuhannesosaa.
   b. Luvussa 9,104 on _____ kokonaista, _____ kymmenesosaa, _____ sadasosaa ja _____ tuhannesosaa.
   c. Luvussa 0,507 on _____ kokonaista, _____ kymmenesosaa, _____ sadasosaa ja _____ tuhannesosaa.

6. Mikä luku on kaksi kymmenesosaa pienempi kuin
   a. 7,43
   b. 5,0
   c. 2,008?

EXTRA:

Siirrytään laskemaan viisijärjestelmässä, eli käytössä on vain numerot 0, 1, 2, 3 ja 4. Laske seuraavat laskut viisijärjestelmässä.

1. Laske.
   a. $3 + 2$
   b. $14 + 3$
   c. $10 – 2$
   d. $21 – 4$
   e. $2 \cdot 3$
   f. $4 \cdot 3$

Liite 7: Kymmenjärjestelmäruudukko kokonaisluvuilla laskemiseen

Tuhannet	Sadat	Kymmenet	Ykköset

Liite 8: Kymmenjärjestelmäruudukko desimaaliluvuilla laskemiseen

T	S	K	Y		KO	SO	TO